

в) $-2e_1 \wedge e_2 + 2e_1 \wedge e_3 - 3e_1 \wedge e_4 + 3e_1 \wedge e_5 + 5e_2 \wedge e_3 + 2e_2 \wedge e_4 - 4e_2 \wedge e_5 - 6e_3 \wedge e_4 - 6e_3 \wedge e_5 - 8e_4 \wedge e_5$

г) $12e_1 \wedge e_2 + 2e_1 \wedge e_3 - 14e_1 \wedge e_5 + 21e_2 \wedge e_3 - 18e_2 \wedge e_4 - 3e_2 \wedge e_5 - 3e_3 \wedge e_4 + 24e_3 \wedge e_5 - 21e_4 \wedge e_5$.

Если да — предъявите разложение явно, если нет — объясните, почему.

ОТВЕТ: (а) разложим: $(e_1 - 2e_3 + 2e_4 + e_5) \wedge (-8e_2 + 12e_3 + 12e_4 - 12e_5)$, (в) $(e_1 - 2e_3 + 2e_4 + e_5) \wedge (-8e_2 + 12e_3 + 12e_4 - 12e_5)$, (г) $(e_1 - 2e_3 + 2e_4 + e_5) \wedge (-8e_2 + 12e_3 + 12e_4 - 12e_5)$.

ПК6♦5 (10 баллов). Найдите размерности линейных носителей многочленов

а) $-8x_1^3 + 36x_1^2x_2 - 24x_1^2x_3 - 54x_1x_2^2 + 72x_1x_2x_3 - 24x_1x_3^2 + 27x_2^3 - 54x_2^2x_3 + 36x_2x_3^2 - 8x_3^3$

б) $13x_1^3 - 66x_1^2x_2 + 46x_1^2x_3 + 66x_1x_2^2 - 44x_1x_2x_3 - 14x_1x_3^2 - 40x_2^3 + 88x_2^2x_3 - 88x_2x_3^2 + 40x_3^3$

в) $-16x_1^3 + 8x_1^2x_2 + 8x_1^2x_3 - 64x_1x_2x_3 + 28x_1x_3^2 - 12x_2^3 + 9x_2^2x_3 - x_2x_3^2 - 8x_3^3$.

ОТВЕТ: (а) 1, (б) 2, (в) 3.

ПК6♦6. Выясните, нормален ли оператор, имеющий в стандартном базисе пространства $\mathbb{C}^2$ матрицу

а) $\begin{pmatrix} \frac{2}{9} + \frac{11i}{9} & \frac{8i}{9} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} + \frac{7i}{9} \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} - \frac{13i}{9} & \frac{14}{9} + \frac{2i}{9} \\ \frac{10}{9} - \frac{10i}{9} & -\frac{1}{3} - \frac{14i}{9} \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} \frac{4}{9} - \frac{11i}{9} & \frac{1}{3} - \frac{4i}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{7i}{9} \end{pmatrix}$ г) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2i}{3} & 2 + \frac{2i}{3} \\ -\frac{2}{3} - 2i & \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \end{pmatrix}$,

и если да, приведите его к нормальным осям.

ОТВЕТ: (а) и (в) операторы не нормальны (они не диагонализуются), (б) в базисе из столбцов матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ оператор имеет матрицу $\begin{pmatrix} 0 & -1 + 2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix}$, (г) в базисе из столбцов матрицы $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{3i}{2} & \frac{3}{2} - \frac{3i}{2} \\ \frac{3}{2} - \frac{3i}{2} & \frac{1}{2} - \frac{3i}{2} \end{pmatrix}$ оператор имеет матрицу $\begin{pmatrix} 0 & -1 - 2i \\ 1 - 2i & 0 \end{pmatrix}$.

ПК6♦7. Найдите полярное разложение $F = SG$, где S самосопряжён и положителен, а $G \in U_2$, для оператора $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, имеющего в стандартном ортонормальном базисе матрицу:

а) $\begin{pmatrix} -46/27 - 8i/9 & 20/27 - 38i/27 \\ -40/27 - 37i/27 & -44/27 + 2i/9 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} -10/9 + 8i/9 & -22/9 - 2i/3 \\ 2 - 4i/9 & -5/9 - 2i/9 \end{pmatrix}$.

где $F F^*$ имеет хар. многочлен $t^2 - 13t + 36 = (t - 9)(t - 4)$.

$G = \begin{pmatrix} -1/3 + 2i/9 & -8/9 - 2i/9 \\ 8/9 - 2i/9 & -1/3 - 2i/9 \end{pmatrix}$, $S^{-1} = \begin{pmatrix} 19/54 & 1/27 + i/27 \\ 1/27 - i/27 & 13/27 \end{pmatrix}$, $F F^* = \begin{pmatrix} 76/9 & -10/9 + 10i/9 \\ -10/9 + 10i/9 & 61/9 \end{pmatrix}$.

где $F F^*$ имеет хар. многочлен $t^2 - 13t + 36 = (t - 9)(t - 4)$.

$G = \begin{pmatrix} -2/3 - 2i/9 & 4/9 - 5i/9 \\ -4/9 - 5i/9 & -2/3 + 2i/9 \end{pmatrix}$, $S^{-1} = \begin{pmatrix} 23/54 & -2/27 - i/27 \\ -2/27 - i/27 & 11/27 \end{pmatrix}$, $F F^* = \begin{pmatrix} 56/9 & 20/9 + 10i/9 \\ 20/9 + 10i/9 & 61/9 \end{pmatrix}$.

ОТВЕТ: (а)

ПК6♦8. Найдите полярное разложение $F = GS$, где $G \in U_2$, а S самосопряжён и положителен, для оператора $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, имеющего в стандартном ортонормальном базисе матрицу:

а) $\begin{pmatrix} -50/27 - 14i/27 & 2/3 - 16i/27 \\ -7/27 - 8i/9 & -70/27 + 26i/27 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 1/27 - 2i/27 & 4/9 + 34i/27 \\ -20/27 + 2i & 35/27 + 38i/27 \end{pmatrix}$.

