

Задачи для подготовки к контрольной № 2

ПК2♦1. Сколько элементов поля а) F_8 б) F_9 в) F_{16} г) F_{27} являются порождающим элементом мультипликативной группы этого поля?

ОТВЕТ: в) 6, г) 4, в) 8, в) 12.

ПК2♦2. В $F_3[x]$ разложите на неприводимые множители или докажите неприводимость многочленов а) $x^5 + x^4 - x^2 - x - 1$ б) $x^5 - x^4 - x^3 - x^2 + 1$ в) $x^5 - x^4 - x^3 - x + 1$.

ОТВЕТ: в) $(x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 - x - 1)$, в) $(x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 - x - 1)$, в) $(x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 - x - 1)$.

ПК2♦3. Разложите в сумму простейших дробей над полем Q рациональные функции:

а) $\frac{x^3 - x^2 + 6x + 4}{x^4 + 2x^3 - 11x^2 - 12x + 36}$ б) $\frac{x^3 - 9x^2 - 6x + 6}{x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 108x + 81}$.

ОТВЕТ: в) $\frac{1}{2} - \frac{x+3}{2} + \frac{x-2}{4} + \frac{x-2}{4}$ г) $\frac{1}{3} - \frac{x-3}{3} - \frac{x-3}{3} - \frac{x-3}{3}$.

ПК2♦4. Найдите коэффициент при x^k у следующих рядов из $Q[[x]]$:

а) $\frac{-8x^2 - 5x + 1}{x^3 - 10x^2 + 32x - 32}$ б) $\frac{-8x^2 + 3x + 7}{x^3 - x^2 - x + 1}$ в) $\frac{x^2 - 4x + 2}{x^3 + 6x^2 + 9x + 4}$.

ОТВЕТ: в) $\frac{34}{25}$, в) $\frac{3}{7}$, в) $\frac{3}{4}$.

ПК2♦5. Явно выразите a_k через k для следующих последовательностей:

- а) $a_0 = 8, a_1 = 81, a_2 = 529, a_k = 9a_{k-1} - 24a_{k-2} + 20a_{k-3}$ при $k \geq 3$
- б) $a_0 = -9, a_1 = 55, a_2 = -289, a_k = -7a_{k-1} - 11a_{k-2} - 5a_{k-3}$ при $k \geq 3$
- в) $a_0 = 2, a_1 = -19, a_2 = 105, a_k = -7a_{k-1} - 11a_{k-2} - 5a_{k-3}$ при $k \geq 3$.

ОТВЕТ: а) $a_k = 2 \cdot 7^k$, б) $a_k = -5 \cdot 2^k$, в) $a_k = 2 \cdot 2^k$.

ПК2♦6. Вычислите коэффициенты при x^k для всех $0 \leq k \leq 3$ у степенных рядов

а) $\ln(-3x^2 + 3x + 1) / \sqrt[3]{-x^2 - 4x + 1}$ б) $\sin(4x^2 - 4x) / \sqrt{4x^2 + 2x + 1}$.

ОТВЕТ: а) $\frac{1}{10} - \frac{1}{3} + \frac{1}{10}$, б) $\frac{3}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$.

ПК2♦7. Запишите в виде несократимых дробей p/q с $p, q \in Z[x]$ степенные ряды

а) $\sum_{n \geq 0} (-5n^3 - 28n^2 - 53n - 34) \cdot x^n$ б) $\sum_{n \geq 0} (5n^3 + 35n^2 + 71n + 44) \cdot x^n$.

ОТВЕТ: а) $\frac{x^4 + 4x^3 + 155x^2 + 366x + 707}{30}$, б) $\frac{x^4 + 4x^3 + 155x^2 + 366x + 707}{30}$.