Программа коллоквиума по алгебре (по материалам первых трёх четвертей)

Сюжет 1. Определение группы, дополнительные свойства единицы и обратных элементов. Образ гомоморфизма групп является подгруппой, а ядро — нормальной подгруппой, равенства $g\ker(\varphi) = \varphi^{-1}(\varphi(g)) = \ker(\varphi)g$. Действие группы G на множестве X, разбиение на орбиты, эффективные, свободные и транзитивные действия, централизаторы и нормализаторы подмножеств в X. Все транспортёры между элементами одной орбиты находятся в биекции друг с другом, стабилизаторы всех элементов одной орбиты сопряжены. Формулы для длины орбиты конечной группы и для числа её орбит на конечном множестве.

Сюжет 2. Циклические подгруппы, порядок элемента группы равен порядку порождённой им циклической подгруппы. Левое и правое действие группы на себе, теорема Лагранжа о смежных классах и индексе подгруппы. Присоединённое действие группы на себе, классы сопряжённости, центр. Нормальные подгруппы и факторгруппы. Коммутант и его универсальное свойство. Коммутант группы $\mathrm{SL}_n(\Bbbk)$, где $\Bbbk$ — поле.

Сюжет 3. Группы S_n и A_n. Знак, длина и цикловой тип перестановки. Описание присоединённого действия, класса сопряжённости и централизатора данной перестановки, число элементов в них. Коммутанты S_n' и A_n'. Простота групп A_n с $n \neq 4$.

Сюжет 4. p-группы, критерий существования неподвижной точки действия p-группы на конечном множестве, нетривиальность центра p-группы. Теорема Силова и дополнение к ней. Прямое и полупрямое произведения групп, примеры.

Сюжет 5. Определение коммутативного кольца и поля. Обратимые элементы и делители нуля. Мультипликативные подмножества, кольцо частных и его универсальное свойство, поле частных целостного кольца. Свойства гомоморфизмов, идеалы и факторкольца, собственный идеал максимален по включению если и только если фактор по нему поле. Нётеровы кольца, нётеровость кольца многочленов над нётеровым кольцом.

Сюжет 6. Свойства взаимно простых элементов коммутативного кольца. Простые и неприводимые элементы, факториальность, нётерово целостное кольцо факториально если и только если каждый его неприводимый элемент прост. Области главных идеалов (ОГИ), каждое евклидово кольцо является ОГИ, все ОГИ факториальны.

Сюжет 7. Кольцо формальных степенных рядов, критерий обратимости ряда, подстановка в ряд ряда без свободного члена, дифференцирование рядов, производные произведения, частного и композиции двух рядов. Экспоненцирование и логарифмирование рядов над полем характеристики нуль являются взаимно обратными изоморфизмами между аддитивной группой рядов без свободного члена и мультипликативной группой рядов с единичным свободным членом. Биномиальный ряд и формула Ньютона для его коэффициентов.

Сюжет 8. Деление многочленов с остатком, кольца и поля $\Bbbk[x]/(f)$, отыскание обратных элементов, китайская теорема об остатках в $\Bbbk[x]$, где $\Bbbk$ — поле. Примитивные расширения полей (присоединение корня неприводимого многочлена), существование поля, над которым данный многочлен полностью раскладывается на линейные множители. Поле комплексных чисел, кольцо гауссовых чисел. Определение кратности корня многочлена, критерий сепарабельности. Интерполяционный многочлен Лагранжа, интерполяция с кратными узлами.

Сюжет 9. Поле рациональных функций $\Bbbk(x)$ и поле рядов Лорана $\Bbbk(\!(x)\!)$, где $\Bbbk$ — поле, вложение $\Bbbk(x) \hookrightarrow \Bbbk(\!(x)\!)$, разложение рациональной функции на простейшие дроби и в степенной ряд. Решение линейных рекуррентных уравнений.

Сюжет 10. Кольца вычетов $\mathbb{Z}/(n)$: описание обратимых элементов и отыскание обратных, теорема Эйлера, малая теорема Ферма, китайская теорема об остатках. Характеристика поля, гомоморфизм Фробениуса. Если порядки элементов абелевой группы ограничены сверху, то максимальный из них является их НОК, всякая конечная подгруппа в мультипликативной группе поля циклическая. Описание конечных полей.

Сюжет 11. Содержание многочлена над факториальным кольцом, лемма Гаусса, факториальность кольца многочленов над факториальным кольцом. Достаточные условия неприводимости и алгоритм Кронекера для разложения на неприводимые множители в $\mathbb{Z}[x]$.

Сюжет 12. Определение модуля над коммутативным кольцом, подмодули и фактор модули, свойства гомоморфизмов, модуль гомоморфизмов. Прямые суммы модулей и подмодулей, дополнительные подмодули. Определение свободного модуля, ранг свободного модуля, задание модуля образующими и соотношениями. Модуль гомоморфизмов между модулями, заданными образующими и соотношениями.

Сюжет 13. Определение ассоциативной алгебры над коммутативным кольцом, алгебра эндоморфизмов модуля. Алгебра матриц: ассоциативность и дистрибутивность умножения, матрицы переходов и матрицы гомоморфизмов. Базисные матрицы E_{ij} и их таблица умножения. Обратимые матрицы, обращение верхней унитреугольной матрицы, пример: теорема об элементарных симметрических функциях.

Сюжет 14. Определитель матрицы, его полилиненйность, кососимметричность и инвариантность относительно транспонирования. Грассмановы многочлены. Миноры и внешняя степень матрицы, мультипликативность внешних степеней. Формулы Лапласа для разложения определителя по набору строк или столбцов. Присоединённая матрица, тождество $A\,A^\vee = A^\vee A = \det(A)\,E$. Матрицы над кольцом многочленов $=$ многочлены с коэффициентами в алгебре матриц, тождество Гамильтона – Кэли $\chi_A(A) = 0$.

Сюжет 15. Метод Гаусса над ОГИ, приведение матрицы к нормальной форме Смита, независимость (с точностью до умножения на обратимые элементы кольца) диагональных элементов от способа приведения (теорема об инвариантных множителях для матриц), решение систем линейных уравнений и отыскание обратной матрицы методом Гаусса.

Сюжет 16. Теорема о взаимных базисах конечно порождённого свободного модуля над ОГИ и его подмодуля, независимость (с точностью до умножения на обратимые элементы кольца) инвариантных множителей от выбора взаимных базисов (теорема об инвариантных множителях для подмодуля в свободном модуле). Разложение конечно порождённого модуля над ОГИ K в прямую сумму свободного и модулей вида $K/(p^n)$, где $p \in K$ прост (теорема об элементарных делителях). Свойства подмодулей кручения и p-кручения, цикловой тип модуля p-кручения. Взаимно однозначное соответствие между наборами инвариантных множителей и наборами элементарных делителей, фробениусово и жорданово представления конечно порождённого модуля над ОГИ.

Сюжет 17. Классификация конечно порождённых абелевых групп, фробениусово и жорданово представления. Описание простых, полупростых и неразложимых абелевых групп, конечно порождённая абелева группа является прямой суммой простых если и только если у любой подгруппы есть дополнительная подгруппа. Число элементов в факторе решётки по соизмеримой подрешётке равно объёму фундаментального параллелепипеда. Подрешётка отщепляется прямым слагаемым, если и только если все её ненулевые элементарные делители равны единице, и если и только если она является множеством всех решений системы однородных линейных уравнений с целыми коэффициентами.

Сюжет 18. Классификация конечномерных векторных пространств с линейным оператором над произвольным полем, жорданова и фробениусова нормальные формы оператора, инвариантные множители, элементарные делители и их отыскание по матрице оператора. Характеристический и минимальный многочлены оператора, их выражение через элементарные делители. Циклический базис и цикловой тип нильпотентного оператора N, отыскание циклового типа по размерностям $\dim\ker N^k$. Собственные числа и собственные подпространства, сумма собственных подпространств прямая. Свойства, характеризующие полупростые, диагонализуемые и циклические операторы. Одновременная диагонализация и общий собственный вектор любого множества коммутирующих операторов. Корневое разложение и вычисление функций от оператора при помощи интерполяционных многочленов, существование $\sqrt{A}$ для $A \in \mathrm{GL}_n(\Bbbk)$, где поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто и $\operatorname{char}\Bbbk \neq 2$.