Образцы задач, которые могут встретиться[1] на коллоквиуме

Задача 1. Опишите все решения уравнения $nx = 0$ в кольце $\mathbb{Z}/(m)$. Сколько их?

Задача 2. Каков порядок мультипликативной группы корней n-той степени из 1 в конечном поле $\mathbb{F}_q$? Сколько элементов в $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{F}_q)$?

Задача 3. При каких q_1, q_2 существует вложение конечных полей $\mathbb{F}_{q_1} \hookrightarrow \mathbb{F}_{q_2}$?

Задача 4. Опишите абелеву группу гомоморфизмов абелевых групп $\mathrm{Hom}\big(\mathbb{Z}/(n), \mathbb{Z}/(m)\big)$.

Задача 5. Опишите группы обратимых элементов колец **а)** $\mathbb{Z}/(4)$ **б)** $\mathbb{Z}/(8)$ **в)** $\mathbb{Z}/(16)$ **г*)** $\mathbb{Z}/(2^n)$ **д)** $\mathbb{Z}/(9)$ **е)** $\mathbb{Z}/(27)$ **ж)** $\mathbb{Z}/(25)$ **з*)** $\mathbb{Z}/(p^n)$, где $p > 2$ — простое.

Задача 6. Найдите число решений уравнения $x^n = 1$ в кольце $\mathbb{Z}/(m)$ при конкретных m, n. Например, сколько решений у уравнения **а)** $x^{57} = 1$ в $\mathbb{Z}/(360)$ **б)** $x^{117} = 1$ в кольце $\mathbb{Z}/(228)$?

Задача 7. Верно ли, что ни одно число **а)** вида $4k + 3$ не является суммой квадратов двух целых чисел **б)** вида 10^{3k+1} не является суммой кубов двух целых чисел?

Задача 8. Чему равно третье по величине натуральное число с остатками
а) 2 и 7 от деления на 57 и 179 **б)** 2, 4, 5 от деления на 5, 7, 8?

Задача 9. При каких p среди квадратов поля $\mathbb{F}_p$ имеется **а)** -1 **б)** 2?

Задача 10. Задачи про кольцо гауссовых чисел $\mathbb{Z}[i] = \mathbb{Z}[x]/(x^2 + 1)$:
а) При каких простых $p \in \mathbb{N}$ имеется ненулевой гомоморфизм колец $\mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}/(p)$?
б) Какие простые $p \in \mathbb{Z}$ остаются таковыми в $\mathbb{Z}[i]$?
в) Разложите 7 и $7 + i$ на простые множители в $\mathbb{Z}[i]$.

Задача 11. Найдите остаток от деления $x^{2023} + x^2 + 1$ на $x^2 - x + 1$ в $\mathbb{Q}[x]$.

Задача 12. Пусть поле $\Bbbk$ конечно. Всякая ли функция $\Bbbk^n \to \Bbbk$ является многочленом?

Задача 13. Может ли ненулевой многочлен $f \in \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ над бесконечным полем $\Bbbk$ задавать тождественно нулевую функцию $\Bbbk^n \to \Bbbk$?

Задача 14. Выразите $\sin(7x)$ в виде многочлена от $\sin x$.

Задача 15. Вычислите сумму $\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \dots$

Задача 16. Вычислите в радикалах **а)** $\cos(2\pi/5)$ **б)** $\sin(2\pi/5)$.

Задача 17. Верно ли, что для любого многочлена $f \in \Bbbk[x]$ ряд $\sum_{k\geqslant 0} f(k)x^k \in \Bbbk[\![x]\!]$ является разложением некоторой рациональной функции из $\Bbbk(x)$?

Задача 18. Найдите k-тый член последовательности a_k, если:
а) $a_0 = 1$, $a_1 = -7$ и $a_k = 5a_{k-1} - 6a_{k-2}$ при $k \geqslant 2$
б) $a_0 = 1$, $a_1 = -3$, $a_2 = -29$ и $a_k = 9a_{k-1} - 26a_{k-2} + 24a_{k-3}$ при $k \geqslant 3$.

Задача 19. Пользуясь разложениями $(1 - x)^{\pm 1/2}$ в $\mathbb{Q}[\![x]\!]$, вычислите

$$\binom{2k-2}{k-1} + \frac{1}{2}\binom{2}{1}\binom{2k-4}{k-2} + \frac{1}{3}\binom{4}{2}\binom{2k-6}{k-3} + \dots + \frac{1}{k-1}\binom{2k-4}{k-2}\binom{2}{1} + \frac{1}{k}\binom{2k-2}{k-1}.$$

Задача 20. Выясните, приводим ли в $\mathbb{Z}[x]$ многочлен
а) $x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 6x + 9$ **б)** $x^5 - 2x^4 + 6x^3 - 8x + 34$ **в)** $x^{105} - 9$
и если да, разложите его на неприводимые множители.

Задача 21. Сколько неприводимых многочленов второй степени в $\mathbb{F}_5[x]$?

Задача 22. У скольких многочленов степени $\leqslant n$ из кольца $\mathbb{F}_2[x]$ нет корней в $\mathbb{F}_2$?

[1] А могут и не встретиться. А могут встретиться, но другие. Может быть, даже и не очень похожие. Наша компания неустанно совершенствует выпускаемые изделия ☺.

Задача 23. Разложите многочлен $x^7 + x^3 + 1$ на неприводимые множители в $\mathbb{F}_2[x]$ или докажите, что он неприводим.

Задача 24. Укажите непростой неприводимый элемент в кольце $\mathbb{Z}[\sqrt{13}]$.

Задача 25. Найдите сумму 4-х степеней комплексных корней многочлена $x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 3$.

Задача 26. Выразите дискриминант кубического трёхчлена $x^3 + px + q$ через p и q.

Задача 27. Верно ли, что столбцы и строки любой матрицы $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ над областью главных идеалов K порождают в K^m и в K^n свободные подмодули одинакового ранга?

Задача 28. Обозначим через $g(A)$ минимальное число порождающих абелевой группы A. Найдите $\max g(A)$ по всем абелевым группам A порядка 315000, укажите, на скольких группах он достигается, и приведите пример такой группы.

Задача 29. Сколько различных разложений в прямую сумму двух собственных подгрупп имеет абелева группа **а)** $\mathbb{Z}/(13) \oplus \mathbb{Z}/(13)$ **б)** $\mathbb{Z}/(13) \oplus \mathbb{Z}/(7)$ **в)** $\mathbb{Z}/(13) \oplus \mathbb{Z}/(49)$?

Задача 30. Есть ли в абелевой группе $\mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(16)$ подгруппа, изоморфная
а) $\mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(8)$ **б)** $\mathbb{Z}/(4) \oplus \mathbb{Z}/(4)$ **в)** $\mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(2)$?

Задача 31. Являются ли абелевы группы $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ конечно порождёнными?

Задача 32. Вычислите $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(n), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

Задача 33. Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие того, что абелева группа $\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}/(p_1^{m_1}) \times \ldots \times \mathbb{Z}/(p_k^{m_k})$, где все p_i — просты, является циклической.

Задача 34. Сколько элементов в абелевой группе с образующими a_1, a_2, a_3, a_4 и соотношениями $-5a_1 + 10a_2 + 10a_3 = -7a_1 + 8a_2 - 2a_3 = 10a_1 - 3a_2 + a_3 - 8a_4 = -9a_2 + 7a_4 = 0$?

Задача 35. Как меняется определитель при отражении матрицы относительно побочной диагонали?

Задача 36. Вычислите определитель матрицы с 3 на главной диагонали и 2 в остальных местах.

Задача 37. Выразите определитель матрицы, строки которой являются последовательными циклическими перестановками строки $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$, через значения полинома $f(x) = \alpha_0 x^n + \ldots + \alpha_{n-1}x + \alpha_n$ на корнях $\sqrt[n+1]{1} \in \mathbb{C}$.

Задача 38. Вычислите все частные производные $\frac{\partial^k \det(A)}{\partial a_{i_1 j_1} \cdots \partial a_{i_k j_k}}$.

Задача 39. НОД 2×2 миноров целочисленной 3×3 матрицы равен 12. Может ли её определитель быть равен **а)** 28 **б)** 36? Может ли НОД элементов этой матрицы быть равен **в)** 1 **г)** 2 **д)** 3 **е)** 4 **ж)** 5 **з)** 6? Если да — приведите пример, нет — объясните, почему.

Задача 40. Существует ли (1) над полем $\mathbb{Q}$ (2) над каким-нибудь полем линейный оператор с характеристическим и минимальным многочленами
а) $\chi(t) = (t^6 + 1)$, $\mu(t) = (t^2 + 1)$ **б)** $\chi(t) = (t-1)^2(t-2)^3$, $\mu(t) = (t-1)(t-2)$
в) $\chi(t) = (t-1)^5(t-2)^5$, $\mu(t) = (t-1)^2(t-2)^3$? Если да, то приведите пример.

Задача 41. Перечислите, с точностью до подобия, все рациональные матрицы с характеристическим многочленом **а)** $(x-2)^3$ **б)** $(x-3)^4$ **в)** $x^4 - 1$ **г)** $(x^4-1)^2$. Какие из них диагонализуемы? Какие полупросты? У каких есть циклический вектор?

Задача 42. Над полем $\mathbb{Q}$ найдите жорданову и фробениусову нормальную форму матрицы
а) $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 15 & -10 & 3 \\ 18 & -9 & 1 \end{pmatrix}$ **б)** $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -16 & -10 & -8 \\ 10 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ **в)** $\begin{pmatrix} 10 & 3 & -3 \\ -16 & -6 & 4 \\ 28 & 7 & -9 \end{pmatrix}$.

Задача 43. Существует ли комплексная 2×4 матрица с множеством 2×2 миноров
а) $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ **б)** $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$?
Если да — приведите пример такой матрицы, если нет — объясните, почему.

Задача 44. Перечислите классы подобных матриц в $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{F}_5)$, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_5)$ и $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_5)$.

Задача 45. Всякая ли квадратная матрица сопряжена своей транспонированной?

Задача 46. Всюду ли плотны в пространстве (1) $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^{n^2}$ (2) $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$
а) матрицы с циклическим вектором **б)** диагонализуемые матрицы?

Задача 47. Вычислите $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{2025}$ в $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{Q})$ и $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{2025}$ в $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{F}_5)$.

Задача 48. Конечная группа транзитивно действует на множестве из не менее двух элементов. Верно ли, что хотя бы один элемент группы действует без неподвижных точек?

Задача 49. Какие классы сопряжённости из S_n лежат в A_n и распадаются на несколько классов сопряжённости в A_n? На сколько именно?

Задача 50. Найдите индекс подгруппы внутренних автоморфизмов в группе $\mathrm{Aut}\,A_5$.

Задача 51. Перечислите все нормальные подгруппы в группе A_4.

Задача 52. Каждая ли перестановка из S_n является композицией двух инволюций?

Задача 53. Всякая ли конечная группа, порождённая двумя различными нетождественными инволюциями, изоморфна группе диэдра?

Задача 54. Приведите пример таких двух не изоморфных групп G_1, G_2 и их нормальных подгрупп $H_1 \lhd G_1$, $H_2 \lhd G_2$, что $H_1 \simeq H_2$ и $G_1/H_1 \simeq G_2/H_2$.

Задача 55. Изоморфны ли группы **а)** $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ и S_3 **б)** $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_3)$ и S_4 **в)** $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3)$ и A_4
г) $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_3)$ и $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ **д)** $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ и $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3) \times \mathbb{Z}/(2)$ **е)** $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ и $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_3) \times \mathbb{Z}/(2)$
ж) $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_4)$ и $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_4)$ **з)** $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_4)$ и $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_4)$ **и)** $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_4)$ и A_5
к) A_5 и собственная группа икосаэдра **л)** S_5 и полная группа икосаэдра.

Задача 56. Раскладывается ли группа кватернионных единиц Q_8 в полупрямое произведение двух собственных подгрупп?

Задача 57. Перечислите все силовские подгруппы в S_7.

Задача 58. Сколько всего силовских p-подгрупп в $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$?

Задача 59. Перечислите (с точностью до изоморфизма) все группы порядка
а) 81 **б)** 63 **в)** 56 **г)** 12 **д)** 8.

Задача 60. Опишите группы автоморфизмов групп:
а) $\mathbb{Z}/(n)$ **б)** $\mathbb{Z}/(p) \times \ldots \times \mathbb{Z}/(p)$ **в)** D_3 **г)** D_4 **д)** Q_8.
У каких из этих групп все автоморфизмы внутренние?