Идеалы, фактор-кольца и разложение на множители

Максимальность, простота и неприводимость. В коммутативном кольце A с единицей собственный[1] идеал[2] $\mathfrak{a} \subset A$ называется *простым* (соотв. *максимальным*), если кольцо $A/\mathfrak{a}$ не имеет делителей нуля (соотв. является полем). Необратимый элемент $a \in A$ называется *простым*, если идеал $(a) \subset A$ прост, и *неприводимым*, если равенство $a = rs$ влечёт обратимость r или s.

АС4⋄1. Опишите все идеалы в кольцах $\Bbbk[x]$ и $\Bbbk[\![x]\!]$, где $\Bbbk$ — поле. Какие из них максимальны? Какие просты?

АС4⋄2. Являются ли $\mathbb{Q}[x,y]$ и $\mathbb{Z}[x]$ областями главных идеалов? Есть ли в них простые немаксимальные идеалы?

АС4⋄3. Обязательно ли конечно кольцо $\mathbb{Z}[x]/(f,g)$, если $f,g \in \mathbb{Z}[x]$ **а)** взаимно просты в кольце $\mathbb{Q}[x]$ **б*)** имеют НОД$(f,g) = 1$ в кольце $\mathbb{Z}[x]$?

АС4⋄4. Как устроено кольцо $\mathbb{Z}[x]/(2, x^2-5)$? Найдите в кольце $\mathbb{Z}[\sqrt{5}] = \mathbb{Z}[x]/(x^2-5)$
а) непростой неприводимый элемент[3]
б) элемент, имеющий два различных[4] разложения на неприводимые множители.

АС4⋄5 (евклидовы кольца). Целостное коммутативное кольцо с единицей называется *евклидовым*, если на нём существует *функция высоты* $\nu : A \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ со свойствами: 1) $\nu(a) = 0$ если и только если $a = 0$ 2) для любых $a \in A$ ненулевого $b \in A$ найдётся такое $q \in A$, что $\nu(a - bq) < \nu(b)$. Покажите, что **а)** каждое евклидово кольцо является областью главных идеалов **б)** высоту на евклидовом кольце можно выбрать так, чтобы[5] $\nu(ab) \geqslant \nu(a)$ для всех a и всех $b \neq 0$ **в)** при таком выборе высоты равенство $\nu(ab) = \nu(a)$ при $a \neq 0$ равносильно обратимости b.

АС4⋄6. Элементы кольца $\mathbb{Z}[i] \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{Z}[x]/(x^2+1) \simeq \{a+ib \in \mathbb{C} \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$ называются *гауссовыми числами*. **а)** Нарисуйте в $\mathbb{C}$ все гауссовы числа, кратные $5-i$ **б)** Найдите наименьшее $n \in \mathbb{N}$, кратное заданному $a+bi \in \mathbb{Z}[i]$, если НОД$(a,b) = 1$ и в общем случае. **в)** Покажите, что кольцо $\mathbb{Z}[i]$ евклидово с приведённой высотой $\nu(z) = |z|^2$. **г)** Найдите НОД$(5+3i, 6-4i)$. **д)** Разложите 3, 5, 7, $7+i$ на простые множители в $\mathbb{Z}[i]$. **е)** Какие простые $p \in \mathbb{Z}$ остаются таковыми в $\mathbb{Z}[i]$?

АС4⋄7. Элементы кольца $\mathbb{Z}[\omega] \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{Z}[x]/(x^2+x+1) \simeq \{a+b\omega \in \mathbb{C} \mid a,b \in \mathbb{Z},\ \omega = (i\sqrt{3}-1)/2\}$ называются *числами Кронекера*[6]. Покажите, что **а)** кольцо $\mathbb{Z}[\omega]$ евклидово с приведённой высотой $z \mapsto |z|^2$ **б)** простое $p \in \mathbb{Z}$ имеет вид x^2+xy+y^2, где $x,y \in \mathbb{Z}$, если и только если $p = 3$ или $p \equiv 1 \pmod 3$. **в)** Какие простые $p \in \mathbb{Z}$ остаются таковыми в $\mathbb{Z}[\omega]$?

АС4⋄8. Является ли кольцо $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \mathbb{Z}[x]/(x^2-2) \simeq \{a+b\sqrt{2} \in \mathbb{R} \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$ евклидовым относительно высоты $\nu(a+b\sqrt{2}) = |a^2-2b^2|$?

АС4⋄9. Может ли неприводимый **1)** в $\mathbb{Q}[x]$ **2)** в $\mathbb{Z}[x]$ многочлен $f \in \mathbb{Z}[x]$ степени $\deg f \geqslant 2$ иметь **а)** рациональные корни **б)** кратные комплексные корни?

АС4⋄10. Приводимы ли в $\mathbb{Q}[x]$ многочлены: **а)** $x^4-8x^3+12x^2-6x+2$ **б)** $x^5-12x^3+36x-12$?

АС4⋄11. В кольце $\mathbb{Z}[x]$ разложите на неприводимые множители или докажите неприводимость многочленов: **а)** x^4+x+1 **б)** $x^5+x^4+x^2+x+2$ **в)** x^6+x^3+1 **г)** $x^{105}-9$

[1] Т. е. отличный от всего кольца.

[2] Т. е. подкольцо, содержащее вместе с каждым своим элементом и все его кратные.

[3] При решении этой задачи полезно понятие *нормы* $\|a+b\sqrt{5}\| \stackrel{\text{def}}{=} (a+b\sqrt{5})(a-b\sqrt{5}) = a^2-5b^2$ и то, что *норменное отображение* $z \mapsto \|z\|$ является мультипликативным гомоморфизмом $\mathbb{Z}[\sqrt{5}] \to \mathbb{Z}$.

[4] Т. е. сомножители разложений нельзя привести в биективное соответствие друг с другом так, чтобы соответственные множители получались друг из друга умножением на обратимый элемент кольца.

[5] Такая высота ν называется *приведённой*. Положите $\nu(a) = \min_{b \neq 0} \nu'(ab)$, где ν' — произвольная высота.

[6] А также *числами Эйзенштейна*.