Многочлены и расширения полей

АС2⋄1. Найдите остатки от деления многочлена $x^{179}+x^{57}+x^2+1$ в кольце $\mathbb{Z}[x]$ на многочлены **а)** $x+1$ **б)** x^2-1 **в)** x^2+1 **г)** x^2+x+1 **д)** x^2+x-1.

АС2⋄2. Вычислите $\text{НОД}(f_1,f_2)$ в кольце $\mathbb{Q}[x]$ и подберите такие $h_1,h_2\in\mathbb{Q}[x]$, что $\text{НОД}(f_1,f_2) = f_1h_1+f_2h_2$ и $\deg h_1<\deg f_2-d$, $\deg h_2<\deg f_1-d$, где $d=\deg \text{НОД}(f_1,f_2)$, для многочленов **а)** $f_1=x^{30}-1$, $f_2=x^8-1$ **б)** $f_1=x^5-1$, $f_2=x^4+x^2+1$.

АС2⋄3. Найдите в $\mathbb{Q}[x]$ все многочлены с остатками **а)** $1+x$, $1+x^2$ от деления на $1+x^2$, $1+x^4$ **б)** 1, 2, x от деления на $(x-1)^2$, $(x+1)^2$, x^2+1 соответственно.

АС2⋄4. Подберите $f\in\mathbb{Q}[x]$ с $\deg f=2$ и $f(1)=2$, $f(2)=20$, $f(3)=200$. Много ли таких f?

АС2⋄5. Пусть поле $\mathbb{F}$ бесконечно. Докажите, что любой ненулевой многочлен $f\in\mathbb{F}[x_1,\dots,x_n]$ задаёт ненулевую функцию $\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}$.

АС2⋄6. Пусть поле $\mathbb{F}$ конечно. Верно ли, что любая функция **а)** $\mathbb{F}\to\mathbb{F}$ **б*)** $\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}$ является многочленом? Существует ли ненулевой многочлен $f\in\mathbb{F}[x_1,\dots,x_n]$, задающий тождественно нулевую функцию $\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}$?

АС2⋄7. Является ли кольцо вычетов **а)** $\mathbb{R}[x]/\left(x^4+1\right)$ **б)** $\mathbb{Q}[x]/\left(x^4+1\right)$ **в)** $\mathbb{Q}[x]/\left(x^3+x+1\right)$ полем? Найдите в этих кольцах $[1+x]^{-1}$ и $[1+x^2]^{-1}$ если они существуют.

АС2⋄8. В поле $\mathbb{C}$ явно вычислите $\operatorname{Re}z$, $\operatorname{Im}z$, $|z|$, $\operatorname{Arg}z$ для **а)** $z=(1+i)^5/(1-i)^3$ **б)** $z=(1+i)^{50}$ **в)** такого z, что $z^2=-1+i\sqrt{3}$.

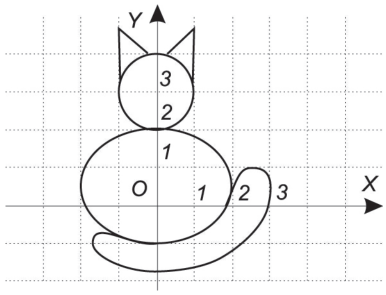

Рис. 1⋄1. Комплексная кошка.

АС2⋄9. Куда переводят отображения $z\mapsto z^2$ и $z\mapsto 1/z$
а) прямые $x=c$, $y=c$, $y=cx$, где $c\in\mathbb{R}$
б) окружности $|z-1|=1$ и $|z-i|=1$ **в)** кошку с рис. 1⋄1?

АС2⋄10. Покажите, что четыре различные неколлинеарные точки $z_1,\dots,z_4\in\mathbb{C}$ лежат на одной окружности если и только если их *двойное отношение* $\frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}\in\mathbb{R}$.

АС2⋄11. Решите в поле $\mathbb{C}$ уравнения: **а)** $z^3=-i$ **б)** $\overline{z}=z^3$ **в)** $(z+1)^n-(z-1)^n=0$ **г)** $(z+i)^n+(z-i)^n=0$.

АС2⋄12. Вычислите суммы: **а)** $\binom{n}{0}+\binom{n}{4}+\binom{n}{8}+\cdots$ **б)** $\binom{n}{1}+\binom{n}{5}+\binom{n}{9}+\cdots$

АС2⋄13. Выразите $\sin 5\varphi$ через $\sin\varphi$, а $\cos(2\pi/5)$ и $\cos(4\pi/5)$ — через радикалы от рациональных чисел.

АС2⋄14. Покажите, что всякий многочлен $f\in\mathbb{R}[x]$ раскладывается в произведение линейных двучленов и квадратных трёхчленов с отрицательным дискриминантом. Разложите в $\mathbb{R}[x]$ на неприводимые множители многочлены x^4+4 и x^8+128.

АС2⋄15. Найдите все $\lambda\in\mathbb{C}$, при которых многочлен $x^4-4x+\lambda$ имеет кратный корень.

АС2⋄16. Выпишите все неприводимые многочлены степени $\leqslant 5$ над полем $\mathbb{F}_2$ и все неприводимые приведённые многочлены степени $\leqslant 4$ над полем $\mathbb{F}_3$.

АС2⋄17. Какие из колец **а)** $\mathbb{F}_5[x]/(x^3+x^2+x+1)$ **б)** $\mathbb{F}_5[x]/(x^3+x+1)$ **в)** $\mathbb{F}_5[x]/(x^3+x^2+1)$ являются полями? Найдите в этих кольцах $[1+x]^{-1}$ и $[1+x^2]^{-1}$ если они существуют.

АС2⋄18. У скольких многочленов степени $\leqslant n$ из кольца $\mathbb{F}_2[x]$ нет корней в $\mathbb{F}_2$?

АС2⋄19. Предъявите примеры полей из **а)** 4 **б)** 8 **в)** 9 **г)** 16 элементов. Укажите в них все квадраты, все кубы и все образующие мультипликативной группы.

АС2⋄20. Изоморфны ли поля $\mathbb{F}_2[x]/(x^3+x+1)$ и $\mathbb{F}_2[x]/(x^3+x^2+1)$? Если да, предъявите изоморфизм явно. Тот же вопрос про поля из зад. АС2⋄17.