

## ПРОГРАММА ПЕРВОГО СЕМЕСТРА

### КУРСА «АЛГЕБРА – I»

интенсивность занятий: 1 пара лекций + 1,5 пары упражнений в неделю  
темы, набранные курсивом могут стать необязательными или упраздниться вовсе

#### ПЕРВАЯ ЧЕТВЕРТЬ (8 НЕДЕЛЬ)

НЕДЕЛЯ 1. Определение поля, коммутативного кольца и абелевой группы. Примеры: числа,  $\mathbb{F}_2$ , многочлены, геометрические векторы, аддитивная и мультипликативная группы поля. Рабочий пример: кольцо  $\mathbb{Z}$  — делимость, НОД и НОК, алгоритм Евклида – Гаусса, взаимная простота, свойства взаимно простых элементов, факториальность.

НЕДЕЛЯ 2. Второй рабочий пример: кольца и поля  $\mathbb{Z}/(n)$  — таблицы умножения, делители нуля, нильпотенты, обратимые элементы, теоремы Ферма и Эйлера, свойства простых полей  $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$ .

НЕДЕЛЯ 3. Гомоморфизмы абелевых групп и коммутативных колец, непустой слой является сдвигом ядра. Приложения: квадраты в поле  $\mathbb{F}_p$ , простое подполе и гомоморфизм Фробениуса. Прямые произведения абелевых групп и коммутативных колец. Китайская теорема об остатках (КТО), явное отыскание чисел с заданными остатками.

НЕДЕЛЯ 4. Многочлены: «деление столбиком» (не только над полем); нод, нок, алгоритм Евклида, взаимная простота, неприводимость (над полем); факториальность кольца  $\mathbb{k}[x]$ . Корни и общие корни нескольких многочленов. Интерполяционный многочлен Лагранжа. КТО для многочленов.

НЕДЕЛЯ 5. Кольца и поля вычетов  $\mathbb{k}[x]/(f)$ , отыскание обратных элементов. Рабочий пример: поле  $\mathbb{C}$ . *Квадратичный закон взаимности.*

КОНТРОЛЬНАЯ № 1: НОД, НОК и КТО в  $\mathbb{Z}$  и  $\mathbb{k}[x]$ , примитивные расширения полей, поле  $\mathbb{C}$ .

НЕДЕЛЯ 6. Конечные поля. Конечная мультипликативная подгруппа в поле циклическая. *Классификация конечных полей.*

НЕДЕЛЯ 7. Формальные степенные ряды и алгебраические операции над ними, обращение ряда с ненулевым свободным членом. Дифференциальное исчисление, приложение: кратные корни многочленов. Кольца частных, поле частных целостного кольца. Примеры:  $\mathbb{Q}$ , поле рациональных функций  $\mathbb{k}(t)$ , поле рядов Лорана  $\mathbb{k}((t))$ , разложение рациональных функций в сумму простейших дробей и в степенной ряд. Приложение: решение линейных рекуррентных уравнений.

НЕДЕЛЯ 8. Экспонента и логарифм, бином с произвольным показателем. *Продвинутые примеры: числа Каталана, действие  $\mathbb{Q}[[d/dt]]$  на  $\mathbb{Q}[[t]]$  и суммирование степеней.*

КОНТРОЛЬНАЯ № 2: рациональные функции и степенные ряды (в сессию после 1-го модуля).

## ВТОРАЯ ЧЕТВЕРТЬ (8 НЕДЕЛЬ)

НЕДЕЛЯ 1. Идеалы и фактор кольца. *Нётеровы кольца, теорема Гильберта о базисе идеала*. Простые и максимальные идеалы. Простые и неприводимые элементы кольца. Области главных идеалов, рабочий пример: евклидовы кольца. Факториальные кольца, факториальность области главных идеалов.

НЕДЕЛЯ 2. Лемма Гаусса и факториальность кольца многочленов над факториальным кольцом. Разложение на множители многочленов с целыми коэффициентами, критерии неприводимости.

НЕДЕЛЯ 3. Модули над коммутативными кольцами: подмодули, фактор модули, дополнительные подмодули и неразложимость, гомоморфизмы и модули гомоморфизмов. Ранг свободного модуля. Задание модулей образующими и соотношениями. Основной рабочий пример:  $\mathbb{Z}$ -модули.

НЕДЕЛЯ 4. Матричный формализм: умножение матриц, как преобразуются строки/столбцы матрицы при умножении слева/справа на заданную матрицу. Матрицы переходов, матрицы гомоморфизмов. Алгебра матриц, таблица умножения матричных единиц.

НЕДЕЛЯ 5. Нильпотентные и обратимые матрицы, обращение верхней унитреугольной матрицы. Рабочий пример: модуль симметрических многочленов и теорема об элементарных симметрических функциях.

НЕДЕЛЯ 6. Определитель и обратимые матрицы размера  $2 \times 2$ , элементарные преобразования строк/столбцов, задаваемые левым/правым умножением на обратимые  $2 \times 2$ -матрицы. Метод Гаусса над областью главных идеалов: приведение матрицы к нормальной форме Смита. Основной рабочий пример:  $\mathbb{Z}$ -модули.

НЕДЕЛЯ 7. Строение конечно порождённых модулей над областью главных идеалов: теорема о взаимных базисах свободного модуля и его подмодуля, инвариантные множители и элементарные делители, разложение модуля в сумму неразложимых циклических подмодулей, независимость инвариантных множителей от выбора взаимных базисов. Основной рабочий пример:  $\mathbb{Z}$ -модули.

НЕДЕЛЯ 8. Строение конечно порождённых абелевых групп.

КОНТРОЛЬНАЯ № 3: разложение на множители и метод Гаусса.

ПИСЬМЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ЗА 1-Й СЕМЕСТР.