Многочлены и ряды

АЛ3◇1. Для всех $m, n \in \mathbb{N}$ вычислите $\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k\binom{m}{k}\binom{k}{n}$.

АЛ3◇2. Укажите в $\mathbb{Z}[\![x]\!] \smallsetminus \mathbb{Q}(x)$ ряд с коэффициентами 0 и 1.

АЛ3◇3. Пусть $p_m(n)$ равно количеству диаграмм Юнга[1] из n клеток и $\leqslant m$ строк, а $p_m(0) \stackrel{\text{def}}{=} 1$. Выразите $p_m(n)$ через $p_{m-1}(n)$ и $p_m(n-m)$ и покажите, что $\sum_{n\geqslant 0} p_m(n)\, t^n \in \mathbb{Q}(t)$.

АЛ3◇4* (теорема Эйлера о пятиугольных числах). Пусть $p(n)$ равно числу всех диаграмм Юнга из n клеток, а $p^{\vee}_{\text{ч}}(n)$ и $p^{\vee}_{\text{н}}(n)$ — количествам тех из них, где нет строк одинаковой длины и которые имеют, соответственно, чётное и нечётное число строк. Также пусть $p(0) \stackrel{\text{def}}{=} 1$ и $P(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n\geqslant 0} p(n)\, t^n \in \mathbb{Q}[\![t]\!]$. Покажите, что **а)** $P(t) = \prod_{k\geqslant 1}(1-t^k)^{-1}$

б) $1/P(t) = 1 + \sum\limits_{n\geqslant 1} t^n\left(p^{\vee}_{\text{ч}}(n) - p^{\vee}_{\text{н}}(n)\right)$ **в)** $p(n) = \sum\limits_{k\geqslant 1}(-1)^{k+1}\left(p\left(n - \frac{3k^2-k}{2}\right) + p\left(n - \frac{3k^2+k}{2}\right)\right)$.

г) Вычислите $p(10) = p(9) + p(8) - p(5) - p(3)$.

АЛ3◇5. Найдите число всех различных разбиений выпуклого n-угольника на треугольники не пересекающимися нигде кроме вершин диагоналями.

АЛ3◇6*. Убедитесь, что ряд $\operatorname{tg}(t) = \sin(t)/\cos(t) = -i(e^{it} - e^{-it})/(e^{it} + e^{-it}) \in \mathbb{C}[\![x]\!]$ имеет рациональные коэффициенты. Есть ли среди них отрицательные?

АЛ3◇7*. Докажите, что у ряда $\operatorname{td}(-t) = t/(e^t - 1) = \sum_{k\geqslant 0} b_k t^k/k! \in \mathbb{Q}[\![x]\!]$ коэффициенты b_{2n} знакопеременны, а $b_{2n+1} = 0$ при $n \geqslant 1$.

АЛ3◇8*. Выразите через числа b_k из предыдущей задачи коэффициенты рядов

а) $(t/2)\cdot \operatorname{cth}(t/2)$, где $\operatorname{cth} t \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{ch} t/\operatorname{sh} t = (e^t + e^{-t})/(e^t - e^{-t})$ **б)** $(t/2)\cdot\operatorname{ctg}(t/2)$ **в)** $(t/2)\cdot\operatorname{tg}(t/2)$.

АЛ3◇9. Пусть $\nabla : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q}[x]$, $f(x) \mapsto f(x) - f(x-1)$. Покажите, что для любого $\psi(t) \in \mathbb{Q}[\![t]\!]$ корректно определено линейное отображение $\psi(\nabla) : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q}[x]$, и укажите такой ряд φ, что $\varphi(\nabla) = d/dx$. Много ли таких φ?

АЛ3◇10. Покажите, что следующие свойства линейного отображения $F : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q}[x]$ эквивалентны: **а)** F перестановочно с d/dx **б)** F перестановочно с ∇

в) $F = \varphi(d/dx)$ для некоторого $\varphi(t) \in \mathbb{Q}[\![t]\!]$ **г)** $F = \psi(\nabla)$ для некоторого $\psi(t) \in \mathbb{Q}[\![t]\!]$

д) F перестановочно со сдвигом $T_1 : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q}[x]$, $f(x) \mapsto f(x+1)$

е) F перестановочно со всеми сдвигами $T_\alpha : f(x) \mapsto f(x+\alpha)$, где $\alpha \in \mathbb{Q}$.

АЛ3◇11. Верно ли, что любые два коммутирующих со сдвигами линейных отображения $\mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q}[x]$ коммутируют между собой?

АЛ3◇12. Пусть $\varphi(t) = \sum_{k\geqslant 0} \varphi_k t^k/k! \in \mathbb{Q}[\![t]\!]$. Образ базисного монома $x^m \in \mathbb{Q}[x]$ под действием оператора $\varphi(d/dx) : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q}[x]$ называется m-м *многочленом Аппеля* ряда φ и обозначается $f_m(x) = \varphi(d/dx)\, x^m$. Покажите, что при всех целых $n \geqslant 0$:

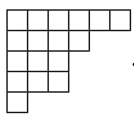
а) $\varphi_n = f_n(0)$

б) $f_n'(x) = n f_{n-1}(x)$

в) $f_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f_{n-k}(x) y^k$

г) $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\varphi_{n-k}x^k = (\varphi^{\downarrow} + x)^n$, где стрелка у $\varphi^{\downarrow}$ предписывает раскрывать бином $(\varphi + x)^n$ заменяя все φ^k на φ_k.

---

[1] Т. е. выровненных по левому краю полосок неубывающей сверху вниз длины, например:  .

Персональный табель ______________________________ .
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 3 (5.10.2023)

№	дата	кто принял	подпись
1			
2			
3			
4а			
б			
в			
г			
5			
6			
7			
8а			
б			
в			
9			
10			
11			
12а			
б			
в			
г			