Многочлены и комплексные числа

АЛ2⋄1 (минимальный многочлен). Пусть поле $\Bbbk$ является подполем поля $\mathbb{K}$. Число $\alpha \in \mathbb{K}$ называется *алгебраическим* над $\Bbbk$, если $f(\alpha) = 0$ для некоторого многочлена $f \in \Bbbk[x]$. Приведённый многочлен наименьшей степени с таким свойством называется *минимальным многочленом* алгебраического числа $\alpha \in \mathbb{K}$ над полем $\Bbbk$. Докажите, что в $\Bbbk[x]$ минимальный многочлен неприводим и делит все многочлены с корнем α.

АЛ2⋄2. Найдите минимальный многочлен числа **а)** $2 - 3i \in \mathbb{C}$ над $\mathbb{R}$ **б)** $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{R}$ над $\mathbb{Q}$.

АЛ2⋄3. Пусть $\Bbbk$ — поле характеристики $p > 0$ и $a \in \Bbbk$. Верно ли, что многочлен $x^p - a$ либо неприводим в $\Bbbk[x]$, либо имеет p-кратный корень в $\Bbbk$?

АЛ2⋄4. Над любым ли конечным полем $\Bbbk$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ имеется неприводимый в $\Bbbk[x]$ многочлен степени n?

АЛ2⋄5. Выражаются ли вещественные и мнимые части корней квадратного трёхчлена из $\mathbb{C}[x]$ через радикалы от вещественных и мнимых частей его коэффициентов?

АЛ2⋄6*. Покажите, что трёхчлен $f(x) = x^3 + px + q \in \mathbb{R}[x]$ тогда и только тогда имеет три вещественных корня, когда его дискриминант[1] положителен, и в этом случае подходящая замена $x = ct$, где $c \in \mathbb{R}$, приводит уравнение $f(x) = 0$ к виду $4t^3 - 3t = a$, где $|a| \leqslant 1$, а его корни выражаются через $\arccos a$.

АЛ2⋄7. Для всех $n, s \in \mathbb{N}$ вычислите в поле $\mathbb{C}$ **а)** сумму **б)** произведение s-тых степеней всех корней n-той степени из 1.

АЛ2⋄8. Покажите, что $\sin mx / \sin x$ при нечётном $m \in \mathbb{N}$ является многочленом от $\sin^2 x$ и найдите степень, корни и старший коэффициент этого многочлена.

АЛ2⋄9* (эйлеровы разложения). При помощи предыдущей задачи докажите тождества

а) $\dfrac{\sin(mx)}{\sin x} = (-4)^{\frac{m-1}{2}} \prod\limits_{j=1}^{\frac{m-1}{2}} \left(\sin^2 x - \sin^2\left(\dfrac{2\pi j}{m}\right)\right)$ **б)** $(-1)^{\frac{m-1}{2}} \sin(mx) = 2^{m-1} \prod\limits_{j=0}^{m-1} \sin\left(x + \dfrac{2\pi j}{m}\right)$

АЛ2⋄10 (квадратичная взаимность по Эйзенштейну). Зафиксируем простое $p \in \mathbb{N}$. Число

$$\left(\frac{n}{p}\right) \overset{\text{def}}{=} [n]_p^{(p-1)/2} = \begin{cases} 1 & \text{если } [n] \text{ ненулевой квадрат в } \mathbb{F}_p \\ 0 & \text{если } [n] = [0] \text{ в } \mathbb{F}_p \\ -1 & \text{если } [n] \text{ не квадрат в } \mathbb{F}_p \end{cases}$$

называется *символом Лежандра–Якоби* числа $n \in \mathbb{Z}$ по модулю p.

а) Докажите, что $\left(\frac{mn}{p}\right) = \left(\frac{m}{p}\right)\left(\frac{n}{p}\right)$. **б)** Вычислите $\sum_{n=1}^{p-1} \left(\frac{n}{p}\right)$.

в*) Сравните знак $\left(\frac{m}{p}\right)$ со знаком произведения $\prod_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} \sin(2\pi mj/p)/\sin(2\pi j/p)$, разложите в нём каждое отношение синусов по формулам из зад. АЛ2⋄9 и докажите для простых натуральных $p, q > 2$ *квадратичный закон взаимности*: $\left(\frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$.

г*) Найдите $\left(\frac{43}{179}\right)$.

АЛ2⋄11* (учите анализ). Пусть $f \in \mathbb{C}[x]$ и $\deg f > 0$. Докажите, что:

а) для любого $c \in \mathbb{R}$ найдётся такой круг $D \subset \mathbb{C}$, что $|f(z)| > c$ для всех $z \notin D$

б) в любом круге $D \subset \mathbb{C}$ есть такая точка $z_0 \in D$, что $|f(z)| \geqslant |f(z_0)|$ для всех $z \in D$

в) существует такое $z_0 \in \mathbb{C}$, что $|f(z)| \geqslant |f(z_0)|$ для всех $z \in \mathbb{C}$

г) если $f(z_0) \neq 0$, то вблизи z_0 найдётся такое $z \in \mathbb{C}$, что $|f(z)| < |f(z_0)|$

д) f имеет корень в $\mathbb{C}$.

[1] *Дискриминантом* приведённого многочлена $f(x) = \prod_i (x - \alpha_i)$ называется произведение $\prod_{i<j} (\alpha_i - \alpha_j)^2$.

Персональный табель ______________________________________ . **Листок № 2 (22.09.2023)**

(напишите свои имя, отчество и фамилию)

№	дата	кто принял	подпись
1			
2а			
б			
3			
4			
5			
6			
7а			
б			
8			
9а			
б			
10а			
б			
в			
г			
11а			
б			
в			
г			
д			