§10. Группы

10.1. Группы, подгруппы, циклы. Множество G называется *группой*, если на нём задана операция *композиции* $G \times G \to G$, $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$ со свойствами

$$\text{ассоциативность:} \qquad \forall\, f, g, h \in G \quad (fg)h = f(gh) \tag{10-1}$$

$$\text{наличие единицы:} \qquad \exists\, e \in G \,:\, \forall\, g \in G \quad eg = g \tag{10-2}$$

$$\text{наличие обратных:} \qquad \forall\, g \in G \quad \exists\, g^{-1} \in G \,:\, g^{-1}g = e \tag{10-3}$$

Группа называется *коммутативной* или *абелевой*, если дополнительно имеет место

$$\text{коммутативность:} \qquad \forall\, f, g \in G \quad fg = gf\,. \tag{10-4}$$

Левый обратный к g элемент g^{-1} из (10-3) является также и правым обратным, т. е. $gg^{-1} = e$, что устанавливается умножением правой и левой части в $g^{-1}gg^{-1} = eg^{-1} = g^{-1}$ слева на левый обратный к g^{-1} элемент.

Упражнение 10.1. Убедитесь, что обратный к g элемент g^{-1} однозначно определяется элементом g и что $\left(g_1 \dots g_k\right)^{-1} = g_k^{-1} \dots g_1^{-1}$.

Для единицы e из (10-2) при любом $g \in G$ выполнятся также и равенство $ge = g$, поскольку $ge = g(g^{-1}g) = (gg^{-1})g = eg = g$.

Упражнение 10.2. Убедитесь, что единичный элемент $e \in G$ единствен.

Если группа G конечна, число элементов в ней обозначается $|G|$ и называется *порядком* группы G. Подмножество $H \subset G$ называется *подгруппой*, если оно образует группу относительно имеющейся в G композиции. Для этого достаточно, чтобы вместе с каждым элементом $h \in H$ в H лежал и обратный к нему элемент h^{-1}, а вместе с каждой парой элементов $h_1, h_2 \in H$ — их произведение $h_1 h_2$. Единичный элемент $e \in G$ автоматически окажется в H, т. к. $e = hh^{-1}$ для произвольного $h \in H$.

Упражнение 10.3. Проверьте, что пересечение любого множества подгрупп является подгруппой.

Пример 10.1 (группы преобразований)

Модельными примерами групп являются *группы преобразований*, обсуждавшиеся нами в n° 0.6. Все взаимно однозначные отображения произвольного множества X в себя очевидно образуют группу. Она обозначается $\operatorname{Aut} X$ и называется *группой автоморфизмов* множества X. Подгруппы $G \subset \operatorname{Aut} X$ называются *группами преобразований* множества X. Для $g \in G$ и $x \in X$ мы часто будем сокращать обозначение $g(x)$ до gx. Группа всех автоморфизмов n-элементного множества $X = \{1, \dots, n\}$ называется n-той *симметрической группой* и обозначается S_n. Порядок $|S_n| = n!$. Чётные перестановки образуют в S_n подгруппу, обозначаемую A_n и часто называемую *знакопеременной группой*. Порядок $|A_n| = n!/2$.

10.1.1. Циклические группы и подгруппы. Наименьшая по включению подгруппа в G, содержащая заданный элемент $g \in G$, состоит из всевозможных целых степеней g^m элемента g, где мы, как обычно, полагаем $g^0 \stackrel{\text{def}}{=} e$ и $g^{-n} \stackrel{\text{def}}{=} \left(g^{-1}\right)^n$. Она называется *циклической подгруппой*, порождённой g, и обозначается $\langle g \rangle$. Группа $\langle g \rangle$ абелева и является образом сюрьективного гомоморфизма абелевых групп $\varphi_g : \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \langle g \rangle$, $m \mapsto g^m$, который переводит сложение в композицию. Если $\ker \varphi_g \neq 0$, то $\ker \varphi_g = (n)$ и $\langle g \rangle \simeq \mathbb{Z}/(n)$, где $n \in \mathbb{N}$ — наименьшая степень, для которой $g^n = e$. Она называется *порядком* элемента g и обозначается $\operatorname{ord}(g)$. В этом случае группа $\langle g\rangle$ имеет порядок[1] $n = \operatorname{ord} g$ и состоит из элементов $e = g^0,\ g = g^1,\ g^2,\ \dots,\ g^{n-1}$. Если $\ker\varphi_g = 0$, то $\varphi_g : \mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \langle g\rangle$ является изоморфизмом и все степени g^m попарно различны. В этом случае говорят, что g имеет *бесконечный порядок* и пишут $\operatorname{ord} g = \infty$.

Напомним[2], что группа G называется *циклической*, если в ней есть такой элемент $g \in G$, что все элементы группы являются его целыми степенями, т. е. $G = \langle g\rangle$. Элемент g называется в этом случае *образующей* циклической группы G. Например, аддитивная группа целых чисел $\mathbb{Z}$ циклическая, и её образующей является любой из элементов ± 1. Согласно сл. 2.3 на стр. 53, всякая конечная подгруппа мультипликативной группы любого поля циклическая. Аддитивная группа вычетов $\mathbb{Z}/(10)$ тоже циклическая, и её образующей является любой из четырёх классов[3] $[\pm 1]_6$, $[\pm 3]_6$.

Упражнение 10.4. Укажите необходимые и достаточные условия для того, чтобы конечно порождённая абелева группа[4] $G = \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}/(p_1^{n_1}) \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/(p_\alpha^{n_\alpha})$ была циклической.

Лемма 10.1
Элемент $h = g^k$ тогда и только тогда является образующей циклической группы $\langle g\rangle$ порядка n, когда $\text{нод}(k, n) = 1$.

Доказательство. Так как $\langle h\rangle \subset \langle g\rangle$, равенство $\langle h\rangle = \langle g\rangle$ равносильно неравенству $\operatorname{ord} h \geqslant n$. Если $h^m = g^{mk} = e$, то $n \mid mk$. При $\text{нод}(n, k) = 1$ мы заключаем, что $n \mid m$, откуда $m \geqslant n$ и, в частности, $\operatorname{ord} h \geqslant n$. Если же $n = n_1 d$ и $k = k_1 d$, где $d > 1$, то $h^{n_1} = g^{kn_1} = g^{nk_1} = e$ и $\operatorname{ord} h \leqslant n_1 < n$. □

10.1.2. Разложение перестановок в композиции циклов. Перестановка $\tau \in S_n$ по кругу переводящая друг в друга какие-нибудь m различных элементов[5]

$$i_1 \mapsto i_2 \mapsto \ldots \mapsto i_{m-1} \mapsto i_m \mapsto i_1 \tag{10-5}$$

и оставляющая на месте все остальные элементы, называется *циклом* длины m.

Упражнение 10.5. Покажите, что k-тая степень цикла длины m является циклом тогда и только тогда, когда $\text{нод}(k, m) = 1$.

Цикл (10-5) часто бывает удобно обозначать $\tau = |i_1, \dots, i_m\rangle$, не смотря на то, что один и тот же цикл (10-5) допускает m *различных* таких записей, получающихся друг из друга циклическими перестановками элементов.

Упражнение 10.6. Сколько имеется в S_n различных циклов длины k?

Теорема 10.1
Каждая перестановка $g \in S_n$ является композицией $g = \tau_1 \ldots \tau_k$ непересекающихся и, стало быть, попарно коммутирующих друг с другом циклов, причём такое разложение единственно с точностью до перестановки циклов.

[1]Таким образом, порядок элемента равен порядку порождённой им циклической подгруппы.
[2]См. n° 2.5.1 на стр. 52.
[3]Обратите внимание, что никакой из шести оставшихся классов образующей не являются.
[4]См. теор. 7.1 на стр. 120.
[5]Числа $i_1, \dots, i_m$ могут быть любыми, не обязательно соседними или возрастающими.

Доказательство. Поскольку множество $X = \{1, \dots, n\}$ конечно, в последовательности

$$x \xmapsto{g} g(x) \xmapsto{g} g^2(x) \xmapsto{g} g^3(x) \xmapsto{g} \dots, \qquad (10\text{-}6)$$

возникающей при применении g к произвольной точке $x \in X$, случится повтор. Так как преобразование $g : X \xrightarrow{\sim} X$ биективно, первым повторившимся элементом будет стартовый элемент x. Таким образом, каждая точка $x \in X$ под действием g движется по циклу. В силу биективности g два таких цикла, проходящие через различные точки x и y, либо не пересекаются, либо совпадают. Таким образом, перестановка g является произведением непересекающихся циклов, очевидно, перестановочных друг с другом. □

Упражнение 10.7. Покажите, что два цикла $\tau_1, \tau_2 \in S_n$ перестановочны ровно в двух случаях: когда они не пересекаются или когда $\tau_2 = \tau_1^s$ и оба цикла имеют одинаковую длину, взаимно простую с s.

Определение 10.1 (цикловой тип перестановки)
Написанный в порядке нестрогого убывания набор длин непересекающихся циклов[1], в которые раскладывается перестановка $g \in S_n$, называется *цикловым типом* перестановки g и обозначается $\lambda(g)$.

Цикловой тип перестановки $g \in S_n$ удобно изображать n-клеточной диаграммой Юнга, а сами циклы записывать по строкам этой диаграммы. Например, перестановка

$$g = (6,\ 5,\ 4,\ 1,\ 8,\ 3,\ 9,\ 2,\ 7) = |1, 6, 3, 4\rangle\, |2, 5, 8\rangle\, |7, 9\rangle = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 6 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 5 & 8 \\ \cline{1-3} 7 & 9 \\ \cline{1-2} \end{array}$$

имеет цикловой тип $\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \ & \ & \ & \ \\ \hline \ & \ & \ \\ \cline{1-3} \ & \ \\ \cline{1-2} \end{array}$, т. е. $\lambda(6,\ 5,\ 4,\ 1,\ 8,\ 3,\ 9,\ 2,\ 7) = (4,\ 3,\ 2)$. Единственной перестановкой циклового типа $\lambda = (1, \dots, 1)$ (один столбец высоты n) является тождественная перестановка Id. Диаграмму $\lambda = (n)$ (одна строка длины n) имеют $(n-1)!$ циклов максимальной длины n.

Упражнение 10.8. Сколько перестановок в симметрической группе S_n имеют заданный цикловой тип, содержащий для каждого $i = 1, \dots, n$ ровно m_i циклов длины i?

Пример 10.2 (вычисление порядка и знака перестановки)
Порядок перестановки $g \in S_n$ равен наименьшему общему кратному длин непересекающихся циклов, из которых она состоит. Например, порядок перестановки

$$(3,\ 12,\ 7,\ 9,\ 10,\ 4,\ 11,\ 1,\ 6,\ 2,\ 8,\ 5) = |1,\ 3,\ 7,\ 11,\ 8\rangle\, |2,\ 12,\ 5,\ 10\rangle\, |4,\ 9,\ 6\rangle \in S_{12}$$

равен $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. По правилу ниточек из прим. 8.1 на стр. 129 знак цикла длины ℓ равен $(-1)^{\ell-1}$. Поэтому перестановка чётна тогда и только тогда, когда у неё чётное число циклов чётной длины.

Упражнение 10.9. Найдите чётность $g = (6,\ 5,\ 4,\ 1,\ 8,\ 3,\ 9,\ 2,\ 7) \in S_9$ и вычислите g^{15}.

[1] Включая циклы длины один, отвечающие элементам, которые перестановка оставляет на месте.

10.2. Группы фигур. Для любой фигуры Φ в евклидовом[1] пространстве $\mathbb{R}^n$ биективные отображения $\Phi \to \Phi$ индуцированные ортогональными[2] линейными преобразованиями пространства $\mathbb{R}^n$, переводящими фигуру Φ в себя, образуют группу преобразований фигуры Φ. Эта группа называется *полной группой фигуры* Φ и обозначается O_Φ. Подгруппу $\mathrm{SO}_\Phi \subset \mathrm{O}_\Phi$, состоящую из биекций, индуцированных собственными[3] ортогональными операторами $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, мы будем называть *собственной группой фигуры* Φ. Если фигура $\Phi \subset \mathbb{R}^n$ содержится в некоторой гиперплоскости $\Pi \subset \mathbb{R}^n$, то собственная группа фигуры Φ совпадает с полной: беря композицию любого несобственного движения из группы фигуры с отражением в плоскости Π, мы получаем собственное движение, которое действует на фигуру Φ точно также, как и исходное несобственное движение.

Упражнение 10.10. Изготовьте модели пяти *платоновых тел* — тетраэдра, октаэдра, куба, додекаэдра и икосаэдра, см. рис. 10◇5 – рис. 10◇8 на стр. 173 – 174.

Пример 10.3 (группы диэдров D_n)
Группа правильного плоского n-угольника, лежащего в пространстве $\mathbb{R}^3$ так, что его центр находится в нуле, обозначается D_n и называется *n-той группой диэдра*. Простейший диэдр — *двуугольник* — возникает при $n = 2$. Его можно представлять себе как вытянутую симметричную луночку с двумя сторонами, изображённую на рис. 10◇1. Группа D_2 такой луночки совпадает с группами описанного вокруг неё прямоугольника и вписанного в неё ромба[4]. Она состоит из тождественного отображения и трёх поворотов на 180° вокруг перпендикулярных друг другу осей, одна из которых проходит через вершины луночки, другая — через середины её сторон, а третья перпендикулярна плоскости луночки и проходит её центр.

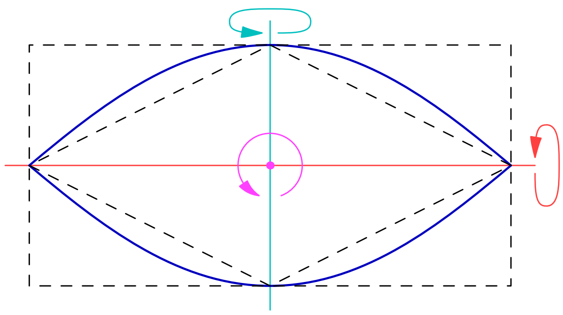


Рис. 10◇1. Двуугольник D_2.

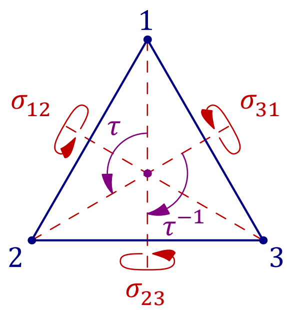


Рис. 10◇2. Группа треугольника.

Упражнение 10.11. Убедитесь, что $D_2 \simeq \mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(2)$.

[1]Напомню, что *евклидовость* означает фиксацию в векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ симметричного билинейного положительного скалярного произведения $V \times V \to \mathbb{R}$, обозначаемого (v, w), см. лекцию http://http://gorod.bogomolov-lab.ru//ps/stud/geom_ru/2122/lec_03.pdf.

[2]Линейный оператор $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ называется *ортогональным*, если он сохраняет скалярное произведение, т. е. $\forall\, v, w \in \mathbb{R}^n\ (Fv, Fw) = (v, w)$ (достаточно, чтобы это равенство выполнялось при $v = w$), см. лекцию http://http://gorod.bogomolov-lab.ru//ps/stud/geom_ru/2122/lec_11.pdf.

[3]Т. е. сохраняющими ориентацию или, что то же самое, с определителем 1, см. раздел 10.2.1 на стр. 133 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_10.pdf.

[4]Мы предполагаем, что луночка такова, что оба они не квадраты.

Следующая диэдральная группа — *группа треугольника* D_3 — состоит из шести движений: тождественного, двух поворотов τ, τ^{-1} на $\pm 120^\circ$ вокруг центра треугольника и трёх осевых симметрий σ_{ij} относительно его медиан (см. рис. 10◇2). Так как движение плоскости однозначно задаётся своим действием на вершины треугольника, группа треугольника D_3 изоморфна группе перестановок S_3 его вершин. При этом повороты на $\pm 120^\circ$ отождествляются с циклическими перестановками $(2,\ 3,\ 1)$, $(3,\ 1,\ 2)$, а осевые симметрии — с транспозициями $\sigma_{23} = (1,\ 3,\ 2)$, $\sigma_{13} = (3,\ 2,\ 1)$, $\sigma_{12} = (2,\ 1,\ 3)$. Поскольку движение плоскости, переводящее в себя правильный n-угольник, однозначно определяется своим действием на аффинный репер, образованный какой-нибудь вершиной и примыкающей к ней парой сторон, группа диэдра D_n при каждом $n \geqslant 2$ состоит из $2n$ движений: выбранную вершину можно перевести в любую из n вершин, после чего одним из двух возможных способов совместить рёбра. Эти $2n$ движений суть n поворотов вокруг центра многоугольника на углы[1] $2\pi k/n$ с $k = 0, 1, \dots, (n-1)$ и n осевых симметрий[2] относительно прямых, проходящих при нечётном n через вершину и середину противоположной стороны, а при чётном n — через пары противоположных вершин и через середины противоположных сторон (см. рис. 10◇3).

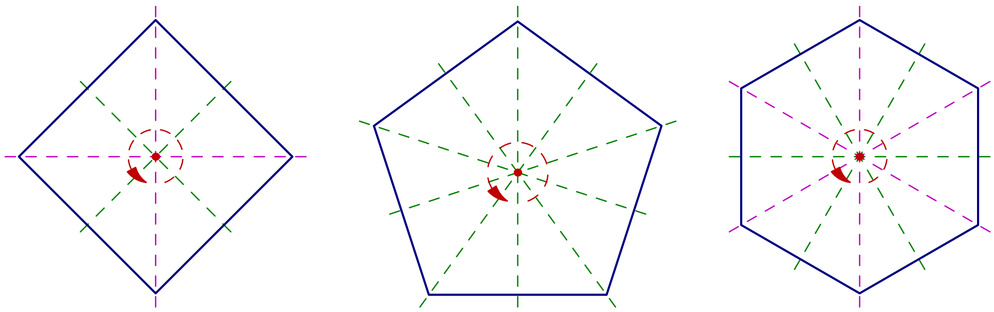


Рис. 10◇3. Оси диэдров D_4, D_5 и D_6.

Упражнение 10.12. Составьте таблицы умножения в группах D_3, D_4 и D_5, аналогичные таблице из форм. (0-23) на стр. 14.

Пример 10.4 (группа тетраэдра)

Поскольку каждое движение трёхмерного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ однозначно задаётся своим действием на вершины правильного тетраэдра и это действие может быть произвольным, полная группа правильного тетраэдра с центром в нуле изоморфна группе S_4 перестановок его вершин и состоит из 24 движений. Собственная группа состоит из $12 = 4 \cdot 3$ движений: поворот тетраэдра однозначно задаётся своим действием на аффинный репер, образованный какой-нибудь вершиной и тремя выходящими из неё рёбрами, и может переводить эту вершину в любую из четырёх вершин, после чего остаются ровно три возможности для совмещения рёбер, сохраняющего ориентацию пространства. Полный список всех собственных движений тетраэдра таков: тождественное, $4 \cdot 2 = 8$ поворотов на углы $\pm 120^\circ$ вокруг прямых, проходящих через вершину и центр противоположной грани, а также 3 поворота на 180° вокруг прямых, проходящих через середины противоположных рёбер. В несобственной группе, помимо перечисленных поворотов, имеется 6 отражений σ_{ij} в плоскостях, проходящих через середину ребра $[i, j]$ и противоположное ребро, см. рис. 10◇4.

[1] При $k = 0$ получается тождественное преобразование.

[2] Или, что то же самое, поворотов на 180° в пространстве.

При изоморфизме с S_4 отражение σ_{ij} переходит в транспозицию букв i и j, повороты на $\pm 120^\circ$, представляющие собой всевозможные композиции $\sigma_{ij}\sigma_{jk}$ с попарно разными i, j, k, переходят в циклические перестановки букв i, j, k, три вращения на 180° относительно осей, соединяющих середины противоположных рёбер, — в одновременные транспозиции непересекающихся пар букв: $\sigma_{12}\sigma_{34} = (2, 1, 4, 3)$, $\sigma_{13}\sigma_{24} = (3, 4, 1, 2)$, $\sigma_{14}\sigma_{23} = (4, 3, 2, 1)$.

Упражнение 10.13. Убедитесь, что вместе с тождественным преобразованием эти три поворота образуют группу двуугольника D_2.

Оставшиеся шесть несобственных преобразований тетраэдра отвечают шести циклическим перестановкам вершин $|1234\rangle$, $|1243\rangle$, $|1324\rangle$, $|1342\rangle$, $|1423\rangle$, $|1432\rangle$ и реализуются поворотами на $\pm 90^\circ$ относительно прямых, проходящих через середины противоположных рёбер с последующим отражением в плоскости, проходящей через центр тетраэдра и перпендикулярной оси поворота.

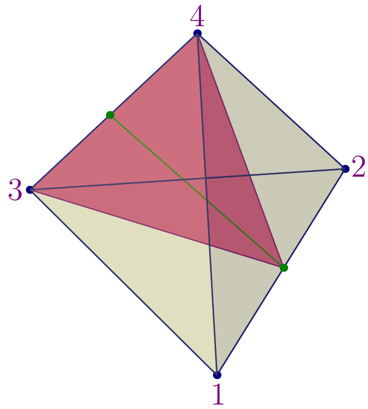


Рис. 10◇4. Зеркало отражения σ_{12} и ось поворота на 180°.

Упражнение 10.14. Выразите эти 6 движений через отражения σ_{ij}.

Пример 10.5 (группа додекаэдра)

Как и для тетраэдра, всякое вращение додекаэдра однозначно задаётся своим действием на аффинный репер, образованный вершиной и тремя выходящими из неё рёбрами, и может переводить эту вершину в любую из 20 вершин, а затем тремя способами совмещать рёбра с сохранением ориентации. Поэтому собственная группа додекаэдра (см. рис. 10◇5) состоит из $20 \cdot 3 = 60$ движений: $6 \cdot 4 = 24$ поворотов на углы $2\pi k/5$, $1 \leqslant k \leqslant 4$, вокруг осей, проходящих через центры противоположных граней додекаэдра, $10 \cdot 2 = 20$ поворотов на углы $\pm 2\pi/3$ вокруг осей, проходящих через противоположные вершины, 15 поворотов на 180° вокруг осей, проходящих через середины противоположных рёбер, и тождественного преобразования. Полная группа додекаэдра состоит из $20 \cdot 6 = 120$ движений и помимо перечисленных 60 поворотов содержит их композиции с центральной симметрией относительно центра додекаэдра.

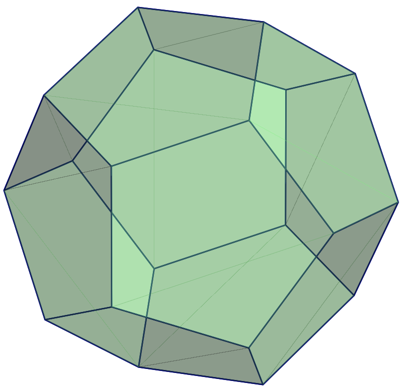


Рис. 10◇5. Додекаэдр.

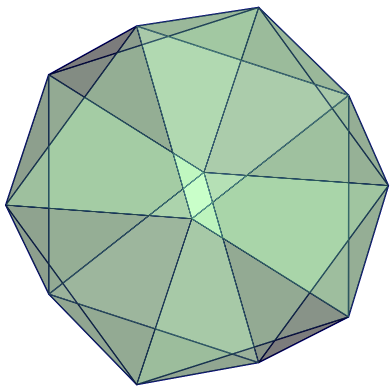


Рис. 10◇6. Икосаэдр.

Упражнение 10.15. Покажите что полные группы куба, октаэдра и икосаэдра состоят, соответственно из 48, 48 и 120 движений, а собственные — из 24, 24 и 60 поворотов.

10.3. Гомоморфизмы групп. Отображение групп $\varphi : G_1 \to G_2$ называется *гомоморфизмом*, если оно переводит композицию в композицию, т. е. для любых $g, h \in G_1$ в группе G_2 выполняется соотношение $\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h)$. Термины *эпиморфизм*, *мономорфизм* и *изоморфизм* применительно к отображению групп всегда подразумевают по умолчанию, что это отображение является *гомоморфизмом* групп.

Упражнение 10.16. Убедитесь, что композиция гомоморфизмов тоже является гомоморфизмом.

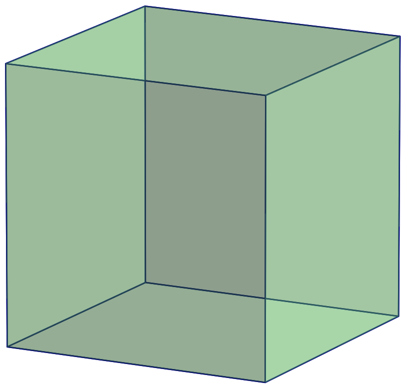


Рис. 10◇7. Куб.

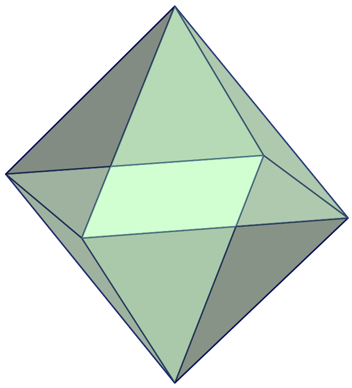


Рис. 10◇8. Октаэдр.

Каждый гомоморфизм групп $\varphi : G_1 \to G_2$ переводит единицу e_1 группы G_1 в единицу e_2 группы G_2: равенство $\varphi(e_1) = e_2$ получается из равенств $\varphi(e_1)\varphi(e_1) = \varphi(e_1e_1) = \varphi(e_1)$ умножением правой и левой части на $\varphi(e_1)^{-1}$. Кроме того, для любого $g \in G$ выполняется равенство $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$, так как $\varphi(g^{-1})\varphi(g) = \varphi(g^{-1}g) = \varphi(e_1) = e_2$. Поэтому образ

$$\operatorname{im}\varphi \overset{\text{def}}{=} \varphi(G_1) \subset G_2$$

гомоморфизма групп является *подгруппой* группы G_2. Полный прообраз единицы $e_2 \in G_2$ называется *ядром* гомоморфизма φ и обозначается

$$\ker\varphi \overset{\text{def}}{=} \varphi^{-1}\left(e_2\right) = \left\{g \in G_1 \;\middle|\; \varphi(g_1) = e_2\right\}.$$

Это подгруппа в G_1, поскольку равенства $\varphi(g) = \varphi(h) = e_2$ влекут равенства

$$\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h) = e_2e_2 = e_2 \quad \text{и} \quad \varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1} = e_2^{-1} = e_2\,.$$

Предложение 10.1
Для любого гомоморфизма групп $\varphi : G_1 \to G_2$ и каждого $g \in G_1$ выполняются равенства

$$\varphi^{-1}\big(\varphi(g)\big) = g(\ker\varphi) = (\ker\varphi)g\,, \quad \text{где}$$
$$g(\ker\varphi) \overset{\text{def}}{=} \{gh \mid h \in \ker\varphi\} \quad \text{и} \quad (\ker\varphi)g \overset{\text{def}}{=} \{hg \mid h \in \ker\varphi\}\,.$$

В частности, все непустые слои φ находится в биекции с $\ker\varphi$.

Доказательство. Если $\varphi(t) = \varphi(g)$, то $\varphi(tg^{-1}) = \varphi(t)\varphi(g)^{-1} = e$ и $\varphi(g^{-1}t) = \varphi(g)^{-1}\varphi(t) = e$, т. е. $tg^{-1} \in \ker\varphi$ и $g^{-1}t \in \ker\varphi$. Поэтому $t \in (\ker\varphi)g$ и $t \in g(\ker\varphi)$. Наоборот, для всех $h \in \ker\varphi$ выполняются равенства $\varphi(hg) = \varphi(h)\varphi(g) = \varphi(g)$ и $\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h) = \varphi(g)$. Тем самым, полный прообраз $\varphi^{-1}\big(\varphi(g)\big)$ элемента $\varphi(g)$ совпадает и с $(\ker\varphi)g$, и с $g(\ker\varphi)$, а $(\ker\varphi)g$ и $g(\ker\varphi)$ совпадают друг с другом. Взаимно обратные биекции

$$\begin{tikzcd}(\ker\varphi)g \arrow[r, bend left, "t\mapsto tg^{-1}"] & \ker\varphi \arrow[l, bend left, "hg\mapsfrom h"] \arrow[r, bend left, "h\mapsto gh"] & g(\ker\varphi) \arrow[l, bend left, "g^{-1}t\mapsfrom t"]\end{tikzcd}$$

между ядром и слоем $\varphi^{-1}\big(\varphi(g)\big) = (\ker\varphi)g = g(\ker\varphi)$ задаются правым и левым умножениями элементов ядра на g, а элементов слоя — на g^{-1}. □

Следствие 10.1

Для того, чтобы гомоморфизм групп $\varphi : G_1 \to G_2$ был инъективен, необходимо и достаточно, чтобы его ядро исчерпывалось единичным элементом. □

Следствие 10.2

Для любого гомоморфизма конечных групп $\varphi : G_1 \to G_2$ выполнено равенство

$$|\operatorname{im}(\varphi)| = |G_1|/|\ker(\varphi)|\,. \tag{10-7}$$

В частности, $|\ker\varphi|$ и $|\operatorname{im}\varphi|$ делят $|G_1|$. □

Пример 10.6 (знакопеременные группы)

Согласно сл. 8.2 на стр. 129 имеется мультипликативный гомоморфизм $\operatorname{sgn} : S_n \to \{\pm 1\}$, сопоставляющий перестановке её знак. Ядро этого гомоморфизма $\ker\operatorname{sgn} = A_n$ представляет собою группу чётных перестановок, имеющую порядок $|A_n| = n!/2$.

Пример 10.7 (линейные группы)

Все линейные автоморфизмы любого векторного пространства V над произвольным полем $\Bbbk$ образуют *полную линейную группу* $\mathrm{GL}(V)$. В силу мультипликативности определителя[1] отображение

$$\det : \mathrm{GL}(V) \to \Bbbk^{\times}\,, \quad F \mapsto \det F\,, \tag{10-8}$$

является гомоморфизмом полной линейной группы в мультипликативную группу $\Bbbk^{\times}$ поля $\Bbbk$. Его ядро называется *специальной линейной группой* и обозначается

$$\mathrm{SL}(V) = \ker\det = \{F : V \xrightarrow{\sim} V \mid \det F = 1\}\,.$$

Если поле $\Bbbk = \mathbb{F}_q$ состоит из q элементов и $\dim V = n$, полная линейная группа конечна и

$$\left|\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)\right| = (q^n-1)(q^n-q)(q^n-q^2)\,\dots\,(q^n-q^{n-1})\,,$$

Упражнение 10.17. Убедитесь в этом.

Так как гомоморфизм (10-8) сюрьективен[2] порядок специальной линейной группы

$$\left|\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)\right| = \left|\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)\right|/|\Bbbk^{\times}| = \frac{(q^n-1)(q^n-q)\dots(q^n-q^{n-1})}{q-1}\,.$$

[1] См. предл. 8.2 на стр. 134.

[2] Диагональный оператор F с собственными числами $(\lambda, 1, \dots, 1)$ имеет $\det F = \lambda$.

Пример 10.8 (проективные группы)

Напомню[1], что с каждым векторным пространством V ассоциировано *проективное пространство* $\mathbb{P}(V)$, точками которого являются одномерные векторные подпространства в V или, что то же самое, классы пропорциональности ненулевых векторов в V. Каждый линейный оператор $F \in \mathrm{GL}(V)$ корректно задаёт биекцию $\overline{F}: \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$, переводящую класс вектора $v \neq 0$ в класс вектора $F(v)$. Таким образом возникает гомоморфизм $F \mapsto \overline{F}$ группы $\mathrm{GL}(V)$ в группу биективных преобразований проективного пространства $\mathbb{P}(V)$. Образ этого гомоморфизма обозначается $\mathrm{PGL}(V)$ и называется *проективной линейной группой* пространства V. Из курса геометрии известно, что два оператора $F, G \in \mathrm{GL}(V)$ тогда и только тогда задают одинаковые преобразования $\overline{F} = \overline{G}$ проективного пространства $\mathbb{P}(V)$, когда они пропорциональны, т. е. $F = \lambda G$ для некоторого $\lambda \in \Bbbk^{\times}$. Поэтому ядром эпиморфизма групп

$$\pi: \ \mathrm{GL}(V) \twoheadrightarrow \mathrm{PGL}(V), \quad F \mapsto \overline{F} \tag{10-9}$$

является *подгруппа гомотетий* $\Gamma \simeq \Bbbk^{\times}$, состоящая из скалярных диагональных операторов. Таким образом, группа $\mathrm{PGL}(V)$ образована классами пропорциональности линейных операторов. Классы пропорциональности операторов с единичным определителем образуют в ней подгруппу, обозначаемую $\mathrm{PSL}(V) \subset \mathrm{PGL}(V)$. Ограничивая эпиморфизм (10-9) на $\mathrm{SL}(V) \subset \mathrm{GL}(V)$ получаем эпиморфизм

$$\pi': \ \mathrm{SL}(V) \twoheadrightarrow \mathrm{PSL}(V), \quad F \mapsto \overline{F} \tag{10-10}$$

ядром которого является конечная мультипликативная подгруппа $\boldsymbol{\mu}_n(\Bbbk) \subset \Bbbk^{\times}$ содержащихся в поле $\Bbbk$ корней степени[2] $n = \dim V = \dim \mathbb{P}(V) + 1$ из единицы.

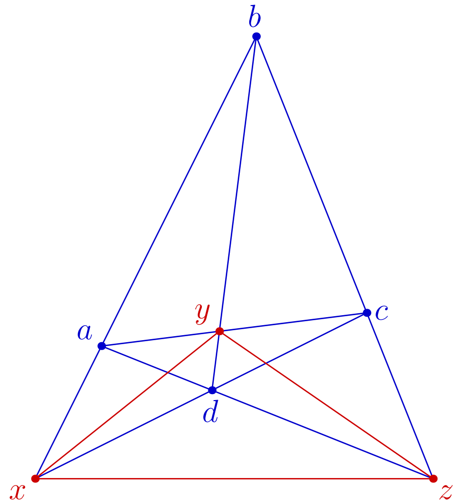


Рис. 10◇9. Четырёхвешинник и ассоциированный треугольник.

Пример 10.9 (эпиморфизм $S_4 \twoheadrightarrow S_3$)

На проективной плоскости $\mathbb{P}_2$ над любым полем $\Bbbk$ с каждой четвёркой точек a, b, c, d, никакие три из которых не коллинеарны связана фигура, образованная тремя парами проходящих через эти точки прямых[3]

$$(ab) \text{ и } (cd), \quad (ac) \text{ и } (bd), \quad (ad) \text{ и } (bc) \tag{10-11}$$

и называемая *четырёхвершинником*, см. рис. 10◇9. Пары прямых (10-11) называются *противоположными сторонами* четырёхвершинника. С четырёхвершинником $abcd$ ассоциирован треугольник xyz с вершинами в точках пересечения пар противоположных сторон

$$x = (ab) \cap (cd), \ y = (ac) \cap (bd), \ z = (ad) \cap (bc) \tag{10-12}$$

Каждая перестановка вершин a, b, c, d однозначно определяет линейное проективное преобразование[4] плоскости, что даёт вложение $S_4 \hookrightarrow \mathrm{PGL}_3(\Bbbk)$. Преобразования из S_4 переводят ассоци-

[1] Мы предполагаем, что читатель знаком с проективными пространствами и проективными преобразованиями по курсу геометрии, см. лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_16.pdf и http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_17.pdf.

[2] Напомню, что по определению $\dim \mathbb{P}(V) \overset{\text{def}}{=} \dim V - 1$.

[3] Они отвечают трём возможным способам разбить точки a, b, c, d на две пары.

[4] Напомню, что каждое линейное проективное преобразование $\overline{F} \in \mathrm{PGL}(V)$ однозначно определяется своим действием на любые $\dim V + 1$ точек пространства $\mathbb{P}(V)$, никакие $\dim V$ из которых не лежат в одной гиперплоскости.

ированный треугольник xyz в себя, переставляя его вершины x, y, z согласно формулам (10-12). Например, 3-цикл $(b, c, a, d) \in S_4$ задаёт циклическую перестановку (y, z, x), а транспозиции (b, a, c, d), (a, c, b, d) и (c, b, a, d) дают транспозиции (x, z, y), (y, x, z) и (z, y, x) соответственно. Таким образом, мы получаем сюрьективный гомоморфизм $S_4 \twoheadrightarrow S_3$. Его ядро имеет порядок $4!/3! = 4$ и состоит из тождественной перестановки и трёх пар независимых транспозиций (b, a, d, c), (c, d, a, b), (d, c, b, a).

Пример 10.10 (S_4 и собственная группа куба)
Линейные преобразования евклидова пространства $\mathbb{R}_3$, составляющие собственную группу куба с центром в нуле, действуют на четырёх прямых a, b, c, d, соединяющих противоположные вершины куба, а также на трёх прямых x, y, z, соединяющих центры его противоположных граней, см. рис. 10◇10. На проективной плоскости $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ эти 7 прямых становятся вершинами четырёхвершинника $abcd$ и ассоциированного с ним треугольника xyz, как на рис. 10◇9. Поворот на 180° вокруг оси, соединяющей середины противоположных рёбер куба, меняет местами примыкающие к этому ребру диагонали и переводит в себя каждую их двух оставшихся диагоналей. Тем самым, вращения куба осуществляют транспозиции любых двух соседних диагоналей, и мы имеем сюрьективный гомоморфизм $SO_{\text{куб}} \to S_4$. Так как обе группы имеют порядок 24, это изоморфизм. Он переводит 6 поворотов на $\pm 90^\circ$ вокруг прямых x, y, z в 6 циклов длины 4 циклового типа $\ydiagram{4}$, 3 поворота на 180° вокруг тех же прямых — в 3 пары независимых транспозиций циклового типа $\ydiagram{2,2}$, 8 поворотов на $\pm 120^\circ$ вокруг прямых a, b, c, d — в 8 циклов длины 3 циклового типа $\ydiagram{3,1}$, а 6 поворотов на 180° вокруг осей, проходящих через середины противоположных рёбер — в 6 простых транспозиций циклового типа $\ydiagram{2,1,1}$. Гомоморфизм $SO_{\text{куб}} \to S_3$, возникающий из действия группы куба на прямых x, y, z, согласован с изоморфизмом $SO_{\text{куб}} \xrightarrow{\sim} S_4$ и эпиморфизмом $S_4 \twoheadrightarrow S_3$ из предыдущего прим. 10.9. Его ядро состоит из собственных ортогональных преобразований евклидова пространства $\mathbb{R}^3$, переводящих в себя каждую из декартовых координатных осей x, y, z в $\mathbb{R}^3$, и совпадает, таким образом, с группой двуугольника D_2 с осями x, y, z. В таком контексте эту группу иногда называют *четвертной группой Клейна* и обозначают V_4. Изоморфизм $SO_{\text{куб}} \xrightarrow{\sim} S_4$ переводит её в ядро эпиморфизма $S_4 \twoheadrightarrow S_3$ из прим. 10.9.

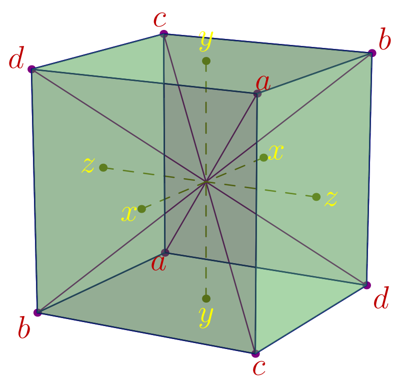


Рис. 10◇10. От куба к четырёхвершиннику.

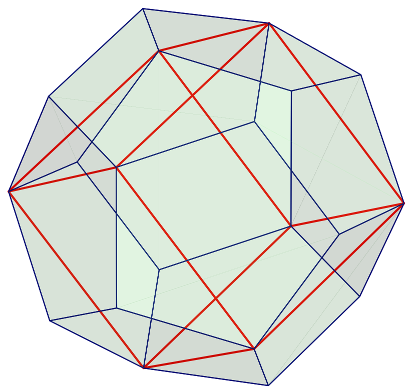


Рис. 10◇11. Один из пяти кубов на додекаэдре.

Пример 10.11 (собственная группа додекаэдра и A_5)
Любая диагональ любой грани додекаэдра единственным образом достраивается до лежащего на поверхности додекаэдра куба, образованного диагоналями граней так, что в каждой грани

рисуется ровно одна диагональ[1], как на рис. 10◇11. Всего таких кубов на поверхности додекаэдра имеется ровно пять, и они биективно соответствуют пяти диагоналям какой-нибудь фиксированной грани. Собственная группа додекаэдра переставляет эти кубы друг с другом, что даёт гомоморфизм собственной группы додекаэдра в симметрическую группу S_5

$$\psi_{\text{дод}} : \ \mathrm{SO}_{\text{дод}} \to S_5 \,. \tag{10-13}$$

Глядя на модель додекаэдра, легко видеть, что образами $20 \cdot 3 = 60$ поворотов, из которых состоит группа $\mathrm{SO}_{\text{дод}}$ являются 60 чётных перестановок: тождественное преобразование додекаэдра задаёт тождественную перестановку кубов; $6 \cdot 4 = 24$ поворота на углы $2\pi k \,/\, 5$, $1 \leqslant k \leqslant 4$, вокруг осей, проходящих через центры противоположных граней, переходят во всевозможные циклы длины 5, т. е. в 24 перестановки циклового типа $\ydiagram{5}$; $10 \cdot 2 = 20$ поворотов на углы $\pm 2\pi \,/\, 3$ вокруг осей, проходящих через противоположные вершины додекаэдра, переходят во всевозможные циклы длины 3, т. е. в 20 перестановок циклового типа $\ydiagram{3,1,1}$; 15 поворотов на 180° вокруг осей, проходящих через середины противоположных рёбер додекаэдра, переходят во всевозможные пары независимых транспозиций, т. е. в 10 перестановок циклового типа $\ydiagram{2,2,1}$. Таким образом, гомоморфизм (10-13) является изоморфизмом собственной группы додекаэдра со знакопеременной подгруппой $A_5 \subset S_5$. В отличие от прим. 10.4 переход от собственной группы додекаэдра к полной не добавляет новых перестановок кубов, поскольку каждое несобственное движение является композицией собственного движения и центральной симметрии, которая переводит каждый из кубов в себя.

Упражнение 10.18. Покажите, что симметрическая группа S_5 не изоморфна полной группе додекаэдра.

10.4. Действие группы на множестве. Пусть G — группа, а X — множество. Обозначим через $\mathrm{Aut}(X)$ группу всех взаимно однозначных отображений из X в себя. Гомоморфизм

$$\varphi : \ G \to \mathrm{Aut}(X)$$

называется *действием* группы G на множестве X или *представлением* группы G автоморфизмами множества X. Отображение $\varphi(g) : \ X \to X$, отвечающее элементу $g \in G$ при действии φ часто бывает удобно обозначать через $\varphi_g : \ X \to X$. Тот факт, что сопоставление $g \mapsto \varphi_g$ является гомоморфизмом групп, означает, что $\varphi_{gh} = \varphi_g \circ \varphi_h$ для всех $g, h \in G$. Если понятно, о каком действии идёт речь, мы часто будем сокращать $\varphi_g(x)$ до gx. При наличии действия группы G на множестве X мы пишем $G : X$. Действие называется *транзитивным*, если любую точку множества X можно перевести в любую другую точку каким-нибудь преобразованием из группы G, т. е. $\forall\, x, y \in X \ \exists\, g \in G \ : \ gx = y$. Более общим образом, действие называется *m-транзитивным*, если любые два упорядоченных набора из m различных точек множества X можно перевести друг в друга подходящими преобразованиями из G. Действие называется *свободным*, если каждый отличный от единицы элемент группы действует на X без неподвижных точек, т. е. $\forall\, g \in G \ \forall\, x \in X \ gx = x \Rightarrow g = e$. Действие $\varphi : \ G \to \mathrm{Aut}\, X$ называется *точным* (или

[1]Проще всего это увидеть на модели додекаэдра, которую я ещё раз настоятельно рекомендую изготовить — см. упр. 10.10 на стр. 171.

эффективным), если каждый отличный от единицы элемент группы действует на X не тождественно, т. е. когда $\ker\varphi = e$. Точное представление отождествляет G с группой преобразований $\varphi(G) \subset \operatorname{Aut}(X)$ множества X. Отметим, что любое свободное действие точно.

Если группа G действует на множестве X, то она действует и на подмножествах множества X: элемент $g \in G$ переводит подмножество $M \subset X$ в подмножество $gM = \{gm \mid m \in M\}$. При этом отображение $g : M \to gM$, $x \mapsto gx$ биективно, и обратным к нему является отображение $g^{-1} : gM \to g, \ \mapsto g^{-1}y$, ибо $g^{-1}gx = ex = x$. Говорят, что элемент $g \in G$ *нормализует*[1] подмножество $M \subset X$, если $gM = M$, т. е. $gx \in M$ для каждого $x \in M$. Каждый такой элемент задаёт биекцию $g|_M : M \to M$. Если эта биекция тождественна, т. е. $gx = x$ для всех $x \in M$, то говорят, что элемент g *централизует* подмножество M. Множество всех элементов $g \in G$, нормализующих (соотв. централизующих) данное подмножество $M \subset X$ обозначается $N(M)$ (соотв. $Z(M)$) и называется *нормализатором* (соотв. *централизатором*) подмножества $M \subset X$ при заданном действии группы G на X.

Упражнение 10.19. Убедитесь, что $N(M)$ и $Z(M)$ являются подгруппами в G.

Пример 10.12 (регулярные действия)
Обозначим через X множество элементов группы G, а через $\operatorname{Aut}(X)$ — группу автоморфизмов этого *множества*[2]. Отображение $\lambda : G \to \operatorname{Aut} X$, переводящее элемент $g \in G$ в преобразование[3] $\lambda_g : x \mapsto gx$ левого умножения на g является гомоморфизмом групп, поскольку

$$\lambda_{gh}(x) = ghx = \lambda_g(hx) = \lambda_g\left(\lambda_h(x)\right) = \lambda_g \circ \lambda_h(x).$$

Оно называется *левым регулярным действием* группы G на себе. Так как равенство $gh = h$ в группе G влечёт равенство $g = e$, левое регулярное действие свободно и, в частности, точно. Симметричным образом, *правое регулярное действие* $\varrho_g : G \to \operatorname{Aut}(X)$ сопоставляет элементу $g \in G$ преобразование $x \mapsto xg^{-1}$ правого умножения на обратный[4] к g элемент.

Упражнение 10.20. Убедитесь, что ϱ_g является свободным действием.

Тем самым, любая абстрактная группа G может быть реализована как группа преобразований некоторого множества. Например, левые регулярные представления числовых групп реализуют аддитивную группу $\mathbb{R}$ группой сдвигов $\lambda_v : x \mapsto x + v$ числовой прямой , а мультипликативную группу $\mathbb{R}^*$ — группой гомотетий $\lambda_c : x \mapsto cx$ проколотой прямой $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$.

Пример 10.13 (присоединённое действие)
Отображение $\operatorname{Ad} : G \to \operatorname{Aut}(G)$, сопоставляющее элементу $g \in G$ автоморфизм *сопряжения* этим элементом

$$\operatorname{Ad}_g : G \to G, \quad h \mapsto ghg^{-1}, \tag{10-14}$$

называется *присоединённым действием* группы G на себе.

---

[1] В этом случае также говорят, что подмножество $M \subset X$ является g-инвариантным.

[2] Возможно, не перестановочных с имеющейся в G композицией, т. е. не обязательно являющихся автоморфизмами *группы* G.

[3] Обратите внимание, что это преобразование множества X не является гомоморфизмом группы G, поскольку равенство $g(h_1h_2) = (gh_1)(gh_2)$, вообще говоря, не выполняется.

[4] Появление g^{-1} не случайно: проверьте, что сопоставление элементу $g \in G$ отображения правого умножения на g является не гомоморфизмом, а антигомоморфизмом (т. е. оборачивает порядок сомножителей в произведениях).

Упражнение 10.21. Убедитесь, что $\forall\, g \in G$ сопряжение (10-14) является *гомоморфизмом* из G в G и что отображение $g \mapsto \mathrm{Ad}_g$ является гомоморфизмом из G в $\mathrm{Aut}\, G$.

Образ присоединённого действия $\mathrm{Ad}(G) \subset \mathrm{Aut}\, G$ обозначается $\mathrm{Int}(G)$ и называется группой *внутренних автоморфизмов* группы G. Не лежащие в $\mathrm{Int}(G)$ автоморфизмы группы G называются *внешними*. В отличие от левого и правого регулярных действий присоединённое действие, вообще говоря, не свободно и не точно. Например, если группа G абелева, все внутренние автоморфизмы (10-14) тождественные, и ядро присоединённого действия в этом случае совпадает со всей группой. В общем случае $\ker(\mathrm{Ad})$ образовано такими $g \in G$, что $ghg^{-1} = h$ для всех $h \in G$. Последнее равенство равносильно равенству $gh = hg$ и означает, что g *коммутирует* со всеми элементами группы. Подгруппа элементов, перестановочных со всеми элементами группы G называется *центром* группы G и обозначается

$$Z(G) = \ker(\mathrm{Ad}) = \{g \in G \mid \forall\, h \in G\;\, gh = hg\}\;.$$

Стабилизатор заданного элемента $g \in G$ в присоединённом действии состоит из всех элементов группы, коммутирующих с g. Он называется *централизатором* элемента g и обозначается

$$Z(g) = \{h \in G \mid hg = gh\}\,.$$

10.4.1. Орбиты. Со всякой группой преобразований G множества X связано бинарное отношение $y \sim x$ на X, означающее, что $y = gx$ для некоторого $g \in G$. Это отношение рефлексивно, ибо $x = ex$, симметрично, поскольку $y = gx \iff x = g^{-1}y$, и транзитивно, т. к. из равенств $y = gx$ и $z = hy$ вытекает равенство $z = (hg)x$. Таким образом, это отношение является эквивалентностью. Класс эквивалентности точки $x \in X$ состоит из всех точек, которые можно получить из x, применяя всевозможные преобразования из группы G. Он обозначается $Gx = \{gx \mid g \in G\}$ и называется *орбитой* x под действием G. Согласно n° 0.4 на стр. 11 множество X распадается в дизъюнктное объединение орбит. Множество всех орбит называется *фактором* множества X по действию группы G и обозначается X/G. С каждой орбитой Gx связано сюрьективное отображение[1] множеств $\mathrm{ev}_x : G \twoheadrightarrow Gx$, $g \mapsto gx$, слой которого над точкой $y \in Gx$ состоит из всех преобразований группы G, переводящих x в y. Он называется *транспортёром* x в y и обозначается $G_{yx} = \{g \in G \mid gx = y\}$. Слой над самой точкой x состоит из всех преобразований, оставляющих x на месте. Он называется *стабилизатором* точки x в группе G и обозначается $\mathrm{Stab}_G(x) = G_{xx} = \{g \in G \mid gx = x\}$ или просто $\mathrm{Stab}(x)$, если понятно, о какой группе G идёт речь.

Упражнение 10.22. Убедитесь, что $\mathrm{Stab}_G(x)$ является подгруппой в группе G.

Если $y = gx$ и $z = hx$, то для любого $s \in \mathrm{Stab}(x)$ преобразование $hsg^{-1} \in G_{zy}$. Наоборот, если $fy = z$, то $h^{-1}fg \in \mathrm{Stab}(x)$. Таким образом, мы имеем обратные друг другу отображения множеств:

$$\mathrm{Stab}(x) \underset{h^{-1}fg \leftarrow f}{\overset{s \mapsto hsg^{-1}}{\rightleftarrows}} G_{zy}\,, \tag{10-15}$$

и стало быть, для любых трёх точек x, y, z из одной G-орбиты имеется биекция между G_{zy} и $\mathrm{Stab}(x)$.

[1] При желании его можно воспринимать как «некоммутативное» *отображения вычисления*.

Предложение 10.2 (формула для длины орбиты)
Длина орбиты произвольной точки x при действии на неё конечной группы преобразований G равна $|Gx| = |G| : |\mathrm{Stab}_G(x)|$. В частности, длины всех орбит и порядки стабилизаторов всех точек являются делителями порядка группы.

Доказательство. Группа G является дизъюнктным объединением множеств G_{yx} по всем $y \in Gx$ и согласно предыдущему все эти множества состоят из $|\mathrm{Stab}(x)|$ элементов. □

Предложение 10.3
Стабилизаторы всех точек, лежащих в одной орбите конечной группы, сопряжены:

$$y = gx \Rightarrow \mathrm{Stab}(y) = g\,\mathrm{Stab}(x)\,g^{-1} = \{ghg^{-1} \mid h \in \mathrm{Stab}(x)\}\,.$$

В частности, все они имеют одинаковый порядок.

Доказательство. Это сразу следует из диаграммы (10-15). □

Пример 10.14 (действие перестановок букв на словах)
Зафиксируем какой-нибудь k-буквенный алфавит $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ и рассмотрим множество X всех n-буквенных слов w, которые можно написать с его помощью. Иначе X можно воспринимать как множество всех отображений $w : \{1, \dots, n\} \to A$. Сопоставим каждой перестановке $\sigma \in S_n$ преобразование $w \mapsto w\sigma^{-1}$, которое переставляет буквы в словах так, как предписывает[1] σ. Таким образом, мы получили действие симметрической группы S_n на множестве слов. Орбита слова $w \in X$ под действием этой группы состоит из всех слов, где каждая буква алфавита встречается столько же раз, сколько в слове w. Стабилизатор $\mathrm{Stab}(w)$ слова w, в котором буква a_i встречается m_i раз (для каждого $i = 1, \dots, k$), состоит из перестановок между собою одинаковых букв и имеет порядок $|\mathrm{Stab}(w)| = m_1! \dots m_k!$. Тем самым, длина орбиты такого слова равна мультиномиальному коэффициенту

$$|S_n w| = \frac{|S_n|}{|\mathrm{Stab}(w)|} = \frac{n!}{m_1! \dots m_k!} = \binom{n}{m_1 \dots m_k}\,.$$

Этот пример показывает, что разные орбиты могут иметь разную длину, и порядки стабилизаторов точек из разных орбит могут быть разными.

Упражнение 10.23. Для каждого из пяти платоновых тел рассмотрите действие группы этого тела на его гранях и по формуле для длины орбиты найдите порядок собственной и несобственной группы каждого из платоновых тел.

Пример 10.15 (классы сопряжённости в симметрической группе)
Перестановка $\mathrm{Ad}_g(\sigma) = g\sigma g^{-1}$, сопряжённая перестановке $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in S_n$, для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ переводит элемент $g(i)$ в элемент $g(\sigma_i)$. Поэтому при сопряжении цикла $\tau = |i_1, \dots, i_k\rangle \in S_n$ перестановкой $g = (g_1, \dots, g_n)$ получится цикл $g\tau g^{-1} = |g_{i_1}, \dots, g_{i_k}\rangle$. Если перестановка $\sigma \in S_n$ имеет цикловой тип λ и является произведением независимых циклов, записанных по строкам диаграммы λ, то действие на такую перестановку внутреннего автоморфизма Ad_g заключается в применении отображения g к заполнению диаграммы λ, т. е. в замене каждого числа i числом g_i.

[1] Т. е. переводит слово $w = a_{\nu_1} \dots a_{\nu_n}$ в слово $a_{\nu_{\sigma^{-1}(1)}} a_{\nu_{\sigma^{-1}(2)}} \dots a_{\nu_{\sigma^{-1}(n)}}$, на i-том месте которого стоит та буква, номер которой в исходном слове w переводится перестановкой σ в номер i.

Таким образом, орбиты присоединённого действия симметрической группы S_n на себе взаимно однозначно соответствуют n-клеточным диаграммам Юнга, и орбита, отвечающая диаграмме λ, состоит из всех перестановок циклового типа λ. Если диаграмма λ имеет m_i строк длины i для каждого $i = 1, \dots, n$, то централизатор любой перестановки σ циклового типа λ состоит из таких перестановок элементов заполнения диаграммы λ независимыми циклами перестановки σ, которые не меняют σ, т. е. циклически переставляют элементы вдоль строк или произвольным образом переставляют строки одинаковой длины между собой как единое целое. Тем самым, порядок стабилизатора перестановки циклового типа λ зависит только от λ и равен $z_\lambda = 1^{m_1} \cdot m_1! \cdot 2^{m_2} \cdot m_2! \cdot \ldots \cdot n^{m_n} \cdot m_n! = \prod_{i=1}^n m_i!\, i^{m_i}$. Количество перестановок циклового типа λ, т. е. длина соответствующей орбиты присоединённого действия, равна $n!/z_\lambda$.

10.4.2. Перечисление орбит. Подсчёт числа элементов в факторе X/G конечного множества X по действию конечной группы G наталкивается на очевидную трудность: поскольку длины у орбит могут быть разные, число орбит «разного типа» придётся подсчитывать по отдельности, заодно уточняя по ходу дела, что именно имеется в виду под «типом орбиты». Разом преодолеть обе эти трудности позволяет

Теорема 10.2 (формула Полиа – Бернсайда)
Пусть конечная группа G действует на конечном множестве X. Для каждого $g \in G$ обозначим через $X^g = \{x \in X \mid gx = x\} = \{x \in X \mid g \in \mathrm{Stab}(x)\}$ множество неподвижных точек преобразования g. Тогда $|X/G| = |G|^{-1} \sum_{g \in G} |X^g|$.

Доказательство. Обозначим через $F \subset G \times X$ множество всех таких пар (g, x), что $gx = x$. Иначе F можно описать как $F = \bigsqcup_{x \in X} \mathrm{Stab}(x) = \bigsqcup_{g \in G} X^g$. Первое из этих описаний получается из рассмотрения проекции $F \twoheadrightarrow X$, второе — из рассмотрения проекции $F \twoheadrightarrow G$. Согласно второму описанию, $|F| = \sum_{g \in G} |X^g|$. С другой стороны, из первого описания мы заключаем, что $|F| = |G| \cdot |X/G|$. В самом деле, стабилизаторы всех точек, принадлежащих одной орбите, имеют одинаковый порядок, и сумма этих порядков по всем точкам орбиты равна произведению порядка стабилизатора на длину орбиты, т. е. $|G|$. Складывая по всем $|X/G|$ орбитам, получаем требуемое. □

Пример 10.16 (ожерелья)
Пусть имеется неограниченный запас одинаковых по форме бусин n различных цветов. Сколько различных ожерелий можно сделать из 6 бусин? Ответом на этот вопрос является количество орбит группы диэдра D_6 на множестве всех раскрасок вершин правильного шестиугольника в n цветов. Группа D_6 состоит из 12 элементов: тождественного преобразования e, двух поворотов $\tau^{\pm 1}$ на $\pm 60^\circ$, двух поворотов $\tau^{\pm 2}$ на $\pm 120^\circ$, центральной симметрии τ^3, трёх отражений σ_{14}, σ_{23}, σ_{36} относительно больших диагоналей и трёх отражений $\overline{\sigma}_{14}$, $\overline{\sigma}_{23}$, $\overline{\sigma}_{36}$ относительно срединных перпендикуляров к сторонам. Единица оставляет на месте все n^6 раскрасок. Раскраски, симметричные относительно остальных преобразований, показаны на рис. 10◇12 на стр. 183. Беря на этих рисунках все допустимые сочетания цветов, получаем, соответственно, n, n^2, n^3, n^4 и n^3 раскрасок. По теор. 10.2 число 6-бусинных ожерелий равно $(n^6 + 3n^4 + 4n^3 + 2n^2 + 2n)/12$.

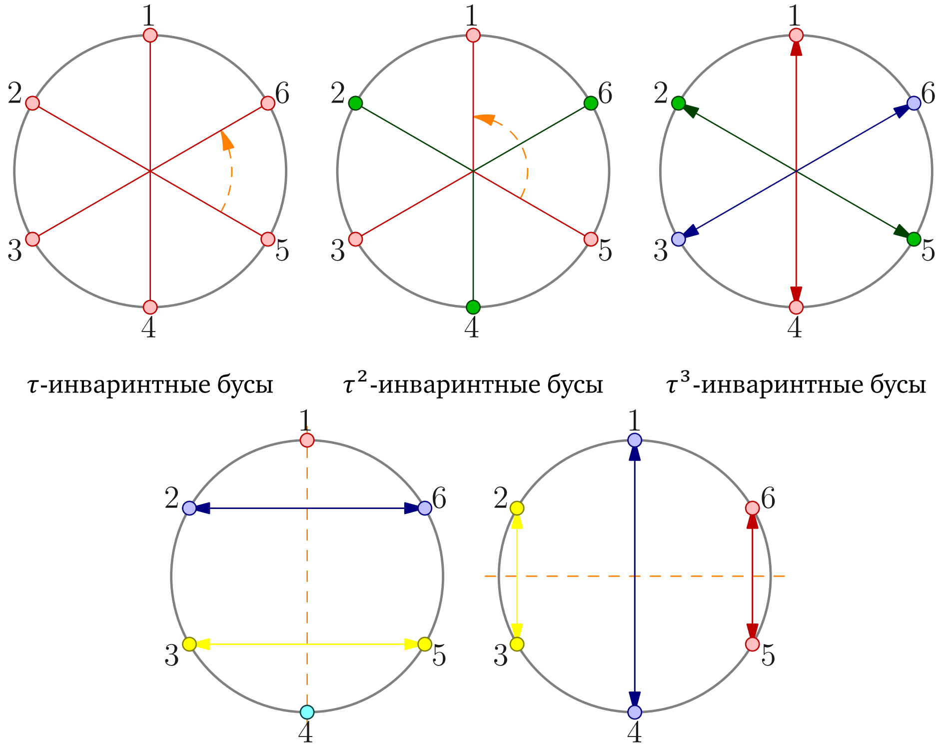
Упражнение 10.24. Подсчитайте количество ожерелий из 7, 8, 9, и 10 бусин.

10.5. Смежные классы и факторизация. Каждая подгруппа $H \subset G$ задаёт на группе G два отношения эквивалентности, происходящие из левого и правого регулярного действия подгруппы H на группе G. Левое действие $\lambda_h : g \mapsto hg$ приводит к эквивалентности

$$g_1 \underset{L}{\sim} g_2 \iff g_1 = hg_2 \text{ для некоторого } h \in H, \tag{10-16}$$

разбивающей группу G в дизъюнктное объединение орбит вида $Hg \overset{\text{def}}{=} \{hg \mid h \in H\}$, называемых *правыми смежными классами* (или *правыми сдвигами*) подгруппы H в группе G. Множество правых смежных классов обозначается $H \backslash G$.

Упражнение 10.25. Покажите, что равенство $Hg_1 = Hg_2$ равносильно любому из эквивалентных друг другу включений $g_1^{-1}g_2 \in H$, $g_2^{-1}g_1 \in H$.



τ-инваринтные бусы τ^2-инваринтные бусы τ^3-инваринтные бусы

σ_{14}-инваринтные бусы $\overline{\sigma}_{14}$-инваринтные бусы

Рис. 10◇12. Симметричные ожерелья из шести бусин.

С правым действием $\varrho_h : g \mapsto gh^{-1}$ связано отношение эквивалентности

$$g_1 \underset{R}{\sim} g_2 \iff g_1 = g_2 h \text{ для некоторого } h \in H, \tag{10-17}$$

разбивающее группу G в дизъюнктное объединение орбит $gH \overset{\text{def}}{=} \{gh \mid h \in H\}$, которые называются *левыми смежными классами* (или *левыми сдвигами*) подгруппы H в группе G. Множество левых смежных классов обозначается G/H.

Поскольку и левое и правое действия подгруппы H на группе G свободны, все орбиты каждого из них состоят из $|H|$ элементов. Тем самым, число орбит в обоих действиях одинаково и равно $|G| / |H|$. Это число называется *индексом* подгруппы H в группе G и обозначается $[G : H] \overset{\text{def}}{=} |G/H|$. Нами установлена

Теорема 10.3 (теорема Лагранжа об индексе подгруппы)
Порядок и индекс любой подгруппы H в произвольной конечной группе G нацело делят порядок G и $[G : H] = |G| : |H|$.

Следствие 10.3
Порядок любого элемента конечной группы нацело делит порядок группы.

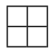
Доказательство. Порядок элемента $g \in G$ равен порядку порождённой им циклической подгруппы $\langle g \rangle \subset G$. □

10.5.1. Нормальные погруппы. Подгруппа $H \subset G$ называется *нормальной* (или *инвариантной*), если для любого $g \in G$ выполняется равенство $gHg^{-1} = H$ или, что то же самое, $gH = Hg$. Иначе можно сказать, что подгруппа $H \subset G$ нормальна тогда и только тогда, когда левая и правая эквивалентности (10-16) и (10-17) совпадают друг с другом и, в частности, $H\backslash G = G/H$. Если подгруппа $H \subset G$ нормальна, мы пишем $H \lhd G$.

Пример 10.17 (ядра гомоморфизмов)
Ядро любого гомоморфизма групп $\varphi : G_1 \to G_2$ является нормальной подгруппой в G_1, поскольку при $\varphi(h) = e$ для любого $g \in G$ имеем равенство

$$\varphi(ghg^{-1}) = \varphi(g)\varphi(h)\varphi(g)^{-1} = \varphi(g)\varphi(g)^{-1} = e\,,$$

означающее, что $g\,(\ker\varphi)\,g^{-1} \subset \ker\varphi$. Это согласуется с равенством правых и левых смежных классов $g\,(\ker\varphi) = (\ker\varphi)\,g$, установленным нами в предл. 10.1.

Пример 10.18 ($V_4 \lhd S_4$)
Подгруппа Клейна $V_4 \subset S_4$ состоящая из перестановок циклового типа  и тождественной перестановки нормальна.

Пример 10.19 (внутренние автоморфизмы)
Подгруппа внутренних автоморфизмов $\mathrm{Int}(G) = \mathrm{Ad}(G)$ нормальна в группе $\mathrm{Aut}(G)$ всех автоморфизмов группы G, поскольку сопрягая внутренний автоморфизм $\mathrm{Ad}_g : h \mapsto ghg^{-1}$ произвольным автоморфизмом $\varphi : G \xrightarrow{\sim} G$, мы получаем внутренний автоморфизм $\varphi \circ \mathrm{Ad}_g \circ \varphi^{-1} = \mathrm{Ad}_{\varphi(g)}$.

Упражнение 10.26. Убедитесь в этом.

Пример 10.20 (параллельные переносы)
Подгруппа параллельных переносов нормальна в группе $\mathrm{Aff}(\mathbb{A}^n)$ всех биективных аффинных преобразований аффинного пространства $\mathbb{A}^n$, т. к. сопрягая параллельный перенос τ_v на вектор v любым аффинным преобразованием $\varphi : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$, получаем перенос[1] $\tau_{D_\varphi(v)}$ на вектор $D_\varphi(v)$.

Упражнение 10.27. Убедитесь в этом.

[1]Напомню, что преобразование $\varphi : \mathbb{A}(V) \to \mathbb{A}(V)$ аффинного пространства $\mathbb{A}(V)$, ассоциированного с векторным пространством V, называется *аффинным*, если отображение $D_\varphi : \overrightarrow{pq} \mapsto \overrightarrow{\varphi(p)\varphi(q)}$ является корректно определённым линейным преобразованием векторного пространства V (оно называется *дифференциалом* отображения φ).

Пример 10.21 (нормализатор и централизатор, ср. с упр. 10.19 на стр. 179)
Пусть группа G действует на множестве X и $M \subset X$ — произвольное подмножество. Напомню[1], что подгруппы $N(M) \stackrel{\text{def}}{=} \{g \in G \mid \forall x \in M \ gx \in M\}$ и $Z(M) \stackrel{\text{def}}{=} \{g \in G \mid \forall x \in M \ gx = x\}$ называются соответственно *нормализатором* и *централизатором* подмножества M. Поскольку для любых $g \in N(M)$, $h \in Z(M)$ и $x \in M$ выполняется равенство $ghg^{-1}x = gg^{-1}x = x$, ибо $h(g^{-1}x) = g^{-1}x$, так как $g^{-1}x \in M$, централизатор является нормальной подгруппой в нормализаторе.

10.5.2. Фактор группы. Попытка определить умножение на множестве левых смежных классов G/H неабелевой группы G формулой

$$(g_1H) \cdot (g_2H) \stackrel{\text{def}}{=} (g_1g_2)H\,, \tag{10-18}$$

вообще говоря, некорректна: различные записи $g_1H = f_1H$ и $g_2H = f_2H$ одних и тех же классов могут приводить к *различным* классам $(g_1g_2)H \neq (f_1f_2)H$.

Упражнение 10.28. Убедитесь, что для группы $G = S_3$ и подгруппы второго порядка $H \subset G$, порождённой транспозицией σ_{12}, формула (10-18) некорректна.

Предложение 10.4
Для того, чтобы правило $g_1H \cdot g_2H = (g_1g_2)H$ корректно определяло на G/H структуру группы, необходимо и достаточно, чтобы подгруппа H была нормальна в G.

Доказательство. Если формула (10-18) корректна, то она задаёт на множестве смежных левых классов G/H групповую структуру: ассоциативность композиции наследуется из[2] G, единицей служит класс $eH = H$, обратным к классу gH — класс $g^{-1}H$. Факторизация $G \twoheadrightarrow G/H$, $g \mapsto gH$, является гомоморфизмом групп с ядром H. Поэтому подгруппа H нормальна в силу прим. 10.17. Наоборот, если H нормальна и $f_1H = g_1H$, $f_2H = g_2H$, то $f_1f_2H = f_1g_2H = f_1Hg_2 = g_1Hg_2 = g_1g_2H$ в силу равенства $g_2H = Hg_2$. □

Определение 10.2
Множество смежных классов G/H нормальной подгруппы $H \lhd G$ с операцией

$$g_1H \cdot g_2H \stackrel{\text{def}}{=} (g_1g_2)H$$

называется *фактором* (или *фактор группой*) группы G по нормальной подгруппе H. Гомоморфизм групп $G \twoheadrightarrow G/H$, $g \mapsto gH$, называется *гомоморфизмом факторизации*.

Следствие 10.4
Каждый гомоморфизм групп $\varphi : G_1 \to G_2$ является композицией эпиморфизма факторизации $G_1 \twoheadrightarrow G_1/\ker\varphi$ и мономорфизма $G_1/\ker\varphi \hookrightarrow G_2$, переводящего смежный класс $g\ker\varphi \in G_1/\ker\varphi$ в элемент $\varphi(g) \in G_2$. В частности, $\operatorname{im}\varphi \simeq G/\ker\varphi$.

Доказательство. Следствие утверждает, что слой $\varphi^{-1}\big(\varphi(g)\big)$ гомоморфизма φ над каждой точкой $\varphi(g) \in \operatorname{im}\varphi \subset G_2$ является левым сдвигом ядра $\ker\varphi$ на элемент g, что мы уже видели в предл. 10.1 на стр. 174. □

[1] См. n° 10.4 на стр. 178.
[2] $(g_1H \cdot g_2H) \cdot g_3H = (g_1g_2)H \cdot g_3H = \big((g_1g_2)g_3\big)H = \big(g_1(g_2g_3)\big)H = g_1H \cdot (g_2g_3)H = g_1H \cdot (g_2H \cdot g_3H)$.

Предложение 10.5
Если подгруппа $H \subset G$ нормализует[1] подгруппу $N \subset G$, то множества $HN = \{hn \mid h \in H,\ n \in N\}$ и $NH = \{nh \mid n \in N,\ h \in H\}$ совпадают друг с другом и являются подгруппой в G, причём $N \lhd HN$, $H \cap N \lhd H$ и $HN/N \simeq H/(H \cap N)$.

Доказательство. $NH = HN$ ибо $nh = h(h^{-1}nh) \in HN$ и $hn = (hnh^{-1})h \in NH$ для всех $n \in N$, $h \in H$. Это подгруппа, так как $(nh)^{-1} = h^{-1}n^{-1} \in HN = NH$ и

$$(n_1h_1)(n_2h_2) = n_1(h_1n_2)h_2 = n_1(n_3h_3)h_2 = (n_1n_3)(h_3h_2) \in NH$$

(существование таких $n_3 \in N$ и $h_3 \in H$, что $h_1n_2 = n_3h_3$, вытекает из равенства $HN = NH$). Подгруппы $H \cap N \lhd H$ и $N \lhd HN$ нормальны, так как по условию $hNh^{-1} \subset N$ для всех $h \in H$. Отображение $\varphi : HN \to H/(H \cap N)$, переводящее произведение hn в смежный класс $h \cdot (H \cap N)$, определено корректно, поскольку при $h_1n_1 = h_2n_2$ элемент $h_1^{-1}h_2 = n_1n_2^{-1} \in H \cap N$, откуда $h_1 \cdot (H \cap N) = h_1 \cdot (h_1^{-1}h_2) \cdot (H \cap N) = h_2 \cdot (H \cap N)$. Оно сюрьективно и является гомоморфизмом, поскольку $\varphi(h_1n_1h_2n_2) = \varphi(h_1h_2(h_2^{-1}n_1h_2)n_2) = h_1h_2 \cdot (H \cap N)$. Так как $\ker\varphi = eN = N$, по сл. 10.4 имеем $H/(H \cap N) = \operatorname{im}\varphi \simeq HN/\ker\varphi = HN/N$. □

Упражнение 10.29. Пусть $\varphi : G_1 \twoheadrightarrow G_2$ — сюрьективный гомоморфизм групп. Покажите, что полный прообраз $N_1 = \varphi^{-1}(N_2)$ любой нормальной подгруппы $N_2 \lhd G_2$ является нормальной подгруппой в G_1 и $G_1/N_1 \simeq G_2/N_2$.

10.6. Коммутант. В группе G произведение $(g,h) \overset{\text{def}}{=} ghg^{-1}h^{-1}$ называется *коммутатором*[2] элементов g, h. Название связано с тем, что $(g,h)hg = gh$. В частности, $gh = hg$ если и только если $(g,h) = e$. Очевидно, что $(g,h)^{-1} = (h,g)$ и $\operatorname{Ad}_f(g,h) = (\operatorname{Ad}_f g, \operatorname{Ad}_f h)$, где

$$\operatorname{Ad}_f : G \to G\,, \quad x \mapsto fxf^{-1}\,,$$

автоморфизм сопряжения. Поэтому всевозможные конечные произведения коммутаторов элементов группы G образуют нормальную подгруппу, которая обозначается $G' \lhd G$ и называется *коммутантом* группы G. Так как $(g,h) = \operatorname{Ad}_g(h)h^{-1}$, коммутаторы элементов $g \in G$ с элементами h из любой нормальной подгруппы $N \lhd G$ лежат в N, т. е. $(G,N) = (N,G) \subset N$. В частности, $(G,G') \subset G'$. Всякий гомоморфизм $\varphi : G \to H$ ограничивается в гомоморфизм $\varphi|_{G'} : G' \to H'$, и если φ сюрьективен, то сюрьективен и $\varphi|_{G'}$.

Предложение 10.6 (универсальное свойство фактора по коммутанту)
Всякий гомоморфизм $\varphi : G \to A$ в абелеву группу A единственным образом пропускается через гомоморфизм факторизации $\pi : G \twoheadrightarrow G/G'$, т. е. существует единственный такой гомоморфизм $\varphi' : G/G' \to A$, что $\varphi = \varphi'\pi$.

Доказательство. Гомоморфизм φ' обязан действовать по правилу $gG' \mapsto \varphi(g)$. Оно корректно, так как $G' \subset \ker\varphi$, поскольку в A все коммутаторы тривиальны. □

Следствие 10.5
Фактор группа G/N абелева если и только если $N \supseteq G'$.

---

[1] Т. е. $hNh^{-1} = N$ для всех $h \in H$.

[2] Или *групповым коммутатором*, который не следует путать с коммутатором $[f,g] = fg - gf$ элементов ассоциативной алгебры.

Доказательство. Применяем предл. 10.6 к эпиморфизму $G \twoheadrightarrow G/N$. $\square$

Пример 10.22 (коммутанты симметрических и знакопеременных групп)
Поскольку каждый коммутатор в S_n является чётной перестановкой, $S_n' \lhd A_n$. Так как $|A_3| = 3$ и группа S_3 не абелева, $S_3' = A_3$. Тем самым, при любом n коммутант S_n' содержит все 3-циклы.

Упражнение 10.30. Убедитесь, что группа A_n порождается 3-циклами.

Мы заключаем, что $S_n' = A_n$. Поскольку $|A_4/V_4| = 3$, группа $A_4/V_4 \simeq \mathbb{Z}/(3)$ абелева, откуда $A_4' \subseteq V_4$ по сл. 10.5. Так как группа A_4 не абелева, A_4' содержит пару независимых транспозиций, а значит, и все сопряжённые ей пары, т. е. $A_4' = V_4$. Отсюда вытекает, что при любом n коммутатор A_n' содержит все пары независимых транспозиций.

Упражнение 10.31. Убедитесь, что при $n \geqslant 5$ группа A_n порождается парами независимых транспозиций.

Мы заключаем, что $A_n' = A_n$ при $n \geqslant 5$.

Пример 10.23 (коммутанты линейных групп)
Пусть $\Bbbk$ — произвольное поле. Так как $\det(f, g) = 1$ для всех $f, g \in \mathrm{GL}_n(\Bbbk)$, мы заключаем, что $\mathrm{GL}_n'(\Bbbk) \trianglelefteq \mathrm{SL}_n(\Bbbk)$. Покажем, что $\mathrm{SL}_n'(\Bbbk) = \mathrm{SL}_n(\Bbbk)$ за исключением случаев $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2)$ и $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$.

Упражнение 10.32. Убедитесь, что $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2) \simeq S_3$ и $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)/\{\pm E\} \simeq A_4$.

Легко видеть, что любую матрицу из $\mathrm{SL}_n(\Bbbk)$ можно превратить в единичную элементарными преобразованиями, заключающимися в прибавлении к одной из строк другой строки, умноженной на произвольное число, т. е. в умножении матрицы слева на матрицу вида[1]

$$T_{ij}(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} E + \alpha E_{ij} \,. \tag{10-19}$$

Упражнение 10.33. Убедитесь в этом.

Коммутатор трансвекции (10-19) с диагональной матрицей $D(\beta_1, \dots, \beta_n)$, где $\prod \beta_i = 1$, равен[2]

$$\begin{aligned}(E + \alpha E_{ij})(\beta_1 E_{11} + \ldots + \beta_n E_{nn})(E - \alpha E_{ij})(\beta_1^{-1} E_{11} + \ldots + \beta_n^{-1} E_{nn}) = \\ = (E + \alpha E_{ij})(E - \alpha\beta_i/\beta_j E_{ij}) = E + \alpha(1 - \beta_i/\beta_j) E_{ij} \,.\end{aligned}$$

Если $n \geqslant 3$ или $\Bbbk \neq \{-1, 0, 1\}$ разность $1 - \beta_i/\beta_j$ можно сделать ненулевой[3]. Поэтому коммутант $\mathrm{SL}_n'(\Bbbk)$ содержит все трансвекции, и тем самым $\mathrm{GL}_n'(\Bbbk) = \mathrm{SL}_n'(\Bbbk) = \mathrm{SL}_n(\Bbbk)$ если $n \geqslant 3$ или $\Bbbk \neq \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3$.

Упражнение 10.34. Вычислите коммутанты $\mathrm{SL}_2'(\mathbb{F}_2)$ и $\mathrm{SL}_2'(\mathbb{F}_3)$.

[1] Такие матрицы называются *трансвекциями*.
[2] См. формулу (5-13) на стр. 93.
[3] Обратите внимание, что при $n = 2$ разность $1 - \beta_i/\beta_j = 1 - \beta_i^2$ зануляется если $\Bbbk^\times \subset \{\pm 1\}$.

Упр. 10.1. Если $fg = e$ и $gh = e$, то $f = fe = f(gh) = (fg)h = eh = h$.

Упр. 10.2. Для двух единичных элементов e' и e'' выполнены равенства $e' = e'e'' = e''$.

Упр. 10.4. Ответ: либо $r = 1$ и $\mathrm{Tors}(G) = 0$ (т. е. $G \simeq \mathbb{Z}$), либо $r = 0$ (т. е. G конечна) и каждое простое число $p \in \mathbb{N}$ присутствует в каноническом разложении

$$G = \frac{\mathbb{Z}}{\left(p_1^{n_1}\right)} \oplus \ldots \oplus \frac{\mathbb{Z}}{\left(p_\alpha^{n_\alpha}\right)}$$

не более одного раза. Доказательство аналогично доказательству предл. 9.2 на стр. 156.

Упр. 10.5. Пусть $k = dr$, $m = \mathrm{ord}(\tau) = ds$, где нод$(r, s) = 1$. Если $d > 1$, то τ^d является произведением d независимых циклов длины s, и $\tau^k = \left(\tau^d\right)^r$ будет произведением s-тых степеней этих циклов. Остаётся показать, что когда $\mathrm{ord}(\tau) = m$ взаимно прост с k, то τ^k тоже цикл длины m. Если для какого-то элемента a цикла τ выполняется равенство $\left(\tau^k\right)^r(a) = a$, то kr делится на m, что при нод$(k, m) = 1$ возможно только когда r делится на m. Поэтому $r \geqslant m$, т. е. длина содержащего a цикла перестановки τ^k не меньше m.

Упр. 10.6. Ответ: $n(n-1)\ldots(n-k+1)/k$ (в числителе дроби k сомножителей).

Упр. 10.7. Непересекающиеся циклы очевидно коммутируют. Если коммутирующие циклы τ_1 и τ_2 пересекаются по элементу a, то $\tau_1(a)$ является элементом цикла τ_2, поскольку в противном случае $\tau_2\tau_1(a) = \tau_1(a)$, а $\tau_1\tau_2(a) \neq \tau_1(a)$, так как $\tau_2(a) \neq a$. По той же причине $\tau_2(a)$ является элементом цикла τ_1, и значит, оба цикла состоят из одних и тех же элементов. Пусть $\tau_1(a) = \tau_2^s(a)$. Любой элемент b, на который оба цикла реально действуют имеет вид $b = \tau_2^r(a)$, и цикл τ_1 действует на него как τ_2^s:

$$\tau_1(b) = \tau_1\tau_2^r(a) = \tau_2^r\tau_1(a) = \tau_2^r\tau_2^s(a) = \tau_2^s\tau_2^r(a) = \tau_2^s(b)\,.$$

Второе утверждение следует из упр. 10.5.

Упр. 10.8. Ответ: $n!/\prod_{i=1}^n i^{m_i}m_i!$ (ср. с форм. (0-11) на стр. 10). Решение: сопоставим каждому заполнению диаграммы циклов λ неповторяющимися числами от 1 до n произведение независимых циклов, циклически переставляющих элементы каждой строки слева направо; получаем сюрьективное отображение множества заполнений на множество всех перестановок циклового типа λ; прообраз каждой перестановки состоит из $\prod_{i=1}^n i^{m_i}m_i!$ заполнений, получающихся друг из друга независимыми циклическими перестановками элементов в каждой строке и произвольными перестановками строк одинаковой длины между собою как единого целого.

Упр. 10.9. $|1,6,3,4\rangle^{15} \cdot |2,5,8\rangle^{15} \cdot |7,9\rangle^{15} = |1,6,3,4\rangle^{-1} \cdot |7,9\rangle = (4,\ 2,\ 6,\ 3,\ 5,\ 1,\ 9,\ 8,\ 7)$

Упр. 10.14. Ответ: $|1,2,3,4\rangle = \sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{34}$, $|1,2,4,3\rangle = \sigma_{12}\sigma_{24}\sigma_{34}$, $|1,3,2,4\rangle = \sigma_{13}\sigma_{23}\sigma_{24}$, $|1,3,4,2\rangle = \sigma_{13}\sigma_{34}\sigma_{24}$, $|1,4,2,3\rangle = \sigma_{24}\sigma_{23}\sigma_{13}$, $|1,4,3,2\rangle = \sigma_{34}\sigma_{23}\sigma_{12}$.

Упр. 10.15. Подсчёт для группы куба дословно тот же, что и для группы додекаэдра. Группы октаэдра и икосаэдра изоморфны группам куба и додекадра с вершинами в центрах граней октаэдра и икосаэдра соответственно.

Упр. 10.17. Зафиксируем в V какой-либо базис и сопоставим оператору $F \in \mathrm{GL}(V)$ базис, состоящий из векторов $f_i = F(e_i)$. Для выбора первого базисного вектора f_1 имеется $|V| - 1 = q^n - 1$ возможностей, для выбора второго — $|V| - |\Bbbk \cdot f_1| = q^n - q$ возможностей, для выбора третьего — $|V| - |\Bbbk \cdot f_1 \oplus \Bbbk \cdot f_2| = q^n - q^2$ возможностей и т. д.

Упр. 10.18. Подсказка: центральная симметрия коммутирует со всеми элементами полной группы додекаэдра; покажите, что единственная перестановка в S_5, коммутирующая со всеми перестановками из S_5 — это тождественное преобразование.

Упр. 10.23. Проиллюстрируем рассуждение на примере икосаэдра. И собственная и полная группы транзитивно действуют на 20 его треугольных гранях. Стабилизатор грани в собственной и полной группах представляет собой собственную и полную группу треугольника на плоскости, состоящую, соответственно из 3 и из 6 преобразований. По формуле для длины орбиты получаем $|\,\mathrm{SO}_{\text{ико}}\,| = 20 \cdot 3 = 60$ и $|\,\mathrm{O}_{\text{ико}}\,| = 20 \cdot 6 = 120$.

Упр. 10.25. Равенство $h_1 g_1 = h_2 g_2$ влечёт равенства $g_2 g_1^{-1} = h_2^{-1} h_1 \in H$ и $g_1 g_2^{-1} = h_1^{-1} h_2 \in H$. С другой стороны, если один из обратных друг другу элементов $g_1^{-1} g_2$ и $g_2^{-1} g_1$ лежит в H, то в H лежит и второй, и $Hg_1 = H(g_2 g_1^{-1}) g_2 = Hg_2$.

Упр. 10.26. $\varphi \circ \mathrm{Ad}_g \circ \varphi^{-1} : \ h \mapsto \varphi\big(g\, \varphi^{-1}(h)\, g^{-1}\big) = \varphi(g)\, h\, \varphi(g)^{-1}$.

Упр. 10.27. Для любой точки $x \in \mathbb{R}^n$ положим $p = \varphi^{-1}(x)$. Так как $\varphi : \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ аффинно, $\varphi(p + v) = x + D_\varphi(v)$. Поэтому $\varphi \circ \tau_v \circ \varphi^{-1} : \ x \mapsto \varphi(p + v) = x + D_\varphi(v)$.

Упр. 10.29. Если $\varphi(x) \in N_2$, то $\varphi(gxg^{-1}) = \varphi(g)\varphi(x)\varphi(g)^{-1} \in N_2$ в силу нормальности $N_2 \lhd G_2$. Поэтому $N_1 = \varphi^{-1}(N_2) \lhd G_1$. Композиция сюрьективных гомоморфизмов $G_1 \twoheadrightarrow G_2 \twoheadrightarrow G_2/N_2$ является сюрьективным гомоморфизмом с ядром N_1.

Упр. 10.30. Поскольку S_n порождается транспозициями, подгруппа A_n порождается парами транспозиций. Но $|ij\rangle|jk\rangle = |ijk\rangle$ и $|ij\rangle|k\ell\rangle = |ijk\rangle|jk\ell\rangle$ при различных i, j, k, ℓ.

Упр. 10.31. Воспользуйтесь равенством $|ij\rangle|jk\rangle = |ij\rangle|\ell m\rangle|jk\rangle|\ell m\rangle$ для различных i, j, k, ℓ, m.

Упр. 10.32. Первый изоморфизм задаётся действием группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2) \simeq \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ на трёх ненулевых векторах координатной плоскости $\mathbb{F}_2^2$, второй — действием группы $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)/\{\pm E\}$ на четырёх одномерных векторных подпространствах в $\mathbb{F}_3^2$ или, что то же самое, действием дробно линейных преобразований $t \mapsto (at + b)/(ct + d)$, где $a, b, c, d \in \mathbb{F}_3$ и $ad \neq bc$, на четырёх точках проективной прямой $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_3) = \{-1, 0, 1, \infty\}$.

Упр. 10.34. Так как $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2) = S_3$, коммутант $\mathrm{SL}_2' = \{E, T, T^2\} \simeq A_3$, где

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad T^2 = T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

циклически переставляют ненулевые векторы $(1, 0), (0, 1), (1, 1)$ пространства $\mathbb{F}_2^2$. При факторизации $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3) \twoheadrightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3) \simeq A_4$ по подгруппе $\{\pm E\} \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ коммутант $\mathrm{SL}_2'(\mathbb{F}_3)$ сюрьективно отображается на группу Клейна $V_4 = A_4'$, состоящую независимых транспозиций двух пар точек проективной прямой $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_3) = \{(1 : 0), (0 : 1), (1 : 1), (1 : -1)\}$, которые задаются следующими матрицами из $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ с точностью до знака

$$I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Убедитесь, что $I^2 = J^2 = K^2 = -E$ и $IJ = -JI = K$, $JK = -KJ = I$, $KI = -IK = J$. Таким образом, при любом выборе знаков у трёх матриц $\pm I$, $\pm J$, $\pm K$ эти три матрицы порождают группу *кватернионных единиц* $Q_8 \overset{\text{def}}{=} \{\pm E, \pm I, \pm J, \pm K\}$ порядка 8, и $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)' = Q_8$.