Эрмитовы пространства

АС16◇1. Существует ли на $\mathbb{R}^2$ эрмитова структура, у которой матрицы Грама вещественной и мнимой частей скалярного произведения в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^2$ равны

а) $\begin{pmatrix} 6 & -8 \\ -8 & \frac{34}{3} \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ **б)** $\begin{pmatrix} \frac{11}{3} & -6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ **в)** $\begin{pmatrix} \frac{13}{2} & -5 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$?

АС16◇2. Найдите ортогональные проекции вектора $(i, 1-i, -1, 1+i) \in \mathbb{C}^4$ на пространство **а)** решений системы $x_1 - i\,x_2 + (2-i)\,x_3 + (1+i)\,x_4 = i\,x_1 + (1+i)\,x_2 + (3-i)\,x_3 - x_4 = 0$ **б)** порождённое векторами $(1, 0, i, -i)$ и $(1+2i, -1+i, 0, 3-i)$, а также на ортогональные дополнения к этим подпространствам в стандартной эрмитовой структуре на $\mathbb{C}^4$.

АС16◇3. В стандартном базисе эрмитова пространства $\mathbb{C}^4$ напишите матрицы ортогональных проекторов на все четыре подпространства из предыдущей задачи.

АС16◇4. Выясните, нормален ли оператор, имеющий матрицу

а) $\begin{pmatrix} 13-3i & -2-14i \\ 10-10i & 14-6i \end{pmatrix}$ **б)** $\begin{pmatrix} 47-47i & -80+48i \\ -48+80i & -47+47i \end{pmatrix}$ **в)** $\begin{pmatrix} 13-8i & 10 \\ -6-8i & 14-10i \end{pmatrix}$

в стандартном базисе эрмитова пространства $\mathbb{C}^2$, и если да, укажите ортонормальный базис, в котором его матрица диагональна, и эту диагональную матрицу.

АС16◇5. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ приведите к главным осям[1] квадратичные формы, имеющие в стандартных координатах вид **а)** $x_1^2 - 5x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$
б) $2x_1x_2 - 6x_1x_3 - 6x_2x_4 + 2x_2x_4$ **в)** $3x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 + x_4^2 + 8x_1x_2 - 4x_3x_4$
г) $9x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+8x_4^2+8x_2x_3-4x_2x_4+4x_3x_4$ **д)** $9x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+8x_4^2+8x_2x_3-4x_2x_4+4x_3x_4$
и определите планарность соответствующих аффинных евклидовых квадрик.

АС16◇6. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ приведите к главным осям[2] грассмановы квадратичные формы, имеющие в стандартных координатах вид
а) $-\frac{4}{3}\xi_1\wedge\xi_2 + \frac{8}{3}\xi_1\wedge\xi_3 - \frac{8}{3}\xi_1\wedge\xi_4 - \frac{20}{3}\xi_2\wedge\xi_3 - \frac{20}{3}\xi_2\wedge\xi_4 - \frac{10}{3}\xi_3\wedge\xi_4$
б) $-\frac{7}{9}\xi_1\wedge\xi_2 - \frac{11}{9}\xi_1\wedge\xi_3 + \frac{32}{9}\xi_1\wedge\xi_4 + \frac{16}{9}\xi_2\wedge\xi_3 + \frac{13}{9}\xi_2\wedge\xi_4 + \frac{1}{9}\xi_3\wedge\xi_4$
в) $\frac{52}{15}\xi_1\wedge\xi_2 + \frac{64}{15}\xi_1\wedge\xi_3 - 2\xi_1\wedge\xi_4 - \frac{4}{3}\xi_2\wedge\xi_3 - \frac{12}{5}\xi_2\wedge\xi_4 + \frac{16}{5}\xi_3\wedge\xi_4$.

АС16◇7. Найдите полярное разложение gh, где g — унитарен, а h — самосопряжён и положителен, линейного оператора на эрмитовом координатном пространстве, имеющего в стандартном ортонормальном базисе матрицу

а) $\begin{pmatrix} -\frac{4}{3}i & -\frac{2}{3}+\frac{4}{3}i \\ \frac{1}{3}+\frac{2}{3}i & \frac{2}{3}i \end{pmatrix}$ **б)** $\begin{pmatrix} -2+2i & 1 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3}-\frac{4}{3}i \end{pmatrix}$ **в)** $\begin{pmatrix} \frac{5}{8}+\frac{3}{4}i & -\frac{19}{16}+\frac{9}{16}i & \frac{25}{16}+\frac{15}{16}i \\ -\frac{7}{16}-\frac{1}{16}i & \frac{19}{16}-\frac{1}{2}i & -\frac{7}{8}+\frac{15}{16}i \\ -\frac{7}{16}+\frac{13}{16}i & -\frac{1}{8}+\frac{5}{16}i & \frac{11}{16}-\frac{1}{4}i \end{pmatrix}$.

АС16◇8. Существует ли такая матрица $X \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{C})$, что матрица e^X равна

а) $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \\ -5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ **б)** $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 8 & 5 & -9 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$?

Если да, предъявите такую матрицу явно. Если нет, объясните почему.

АС16◇9. Докажите, что отображения $A \mapsto (E-A)(E+A)$ и $U \mapsto (U-E)^{-1}(U+E)$ задают взаимно обратные биекции между антиэрмитовыми матрицами A и такими унитарными матрицами U, что $1 \notin \operatorname{Spec} U$.

АС16◇10. Докажите, экспонента $\mathrm{End}^-(\mathbb{C}^n) \twoheadrightarrow \mathrm{U}_n$, $A \mapsto e^A$, эпиморфно отображает пространство антиэрмитовых матриц на унитарную группу. Инъективно ли это отображение?

АС16◇11. Докажите, что унитарная группа компактна и линейно связна.

[1] Укажите какой-нибудь ортонормальный базис, в котором матрица Грама диагональна, и саму эту матрицу.

[2] Укажите какой-нибудь ортонормальный базис, в котором матрица Грама имеет блочно-диагональный вид из 2×2 блоков $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, где $a > 0$, и саму эту матрицу.