Тензорные произведения

АС13◇1. Покажите, что $K \otimes_K M \simeq M$ для всех модулей M над любым коммутативным кольцом K.

АС13◇2. Для любых модулей над произвольным коммутативным кольцом K постройте канонические изоморфизмы
а) $(M \oplus N) \otimes L \simeq (M \otimes L) \oplus (N \otimes L)$ **б)** $\mathrm{Hom}(M \oplus N, L) \simeq \mathrm{Hom}(M, L) \oplus \mathrm{Hom}(N, L)$
в) $\mathrm{Hom}(L, M \oplus N) \simeq \mathrm{Hom}(L, M) \oplus \mathrm{Hom}(L, N)$ **г)** $\mathrm{Hom}(L \otimes M, N) \simeq \mathrm{Hom}(L, \mathrm{Hom}(M, N))$.

АС13◇3. Вычислите $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(18), \mathbb{Z}/(12))$ и $\mathbb{Z}/(12) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(18)$.

АС13◇4. Докажите, что **а)** $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q}$ **б)** $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} = 0$ **в)** $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} = 0$
г) $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(n) = 0$ **д)** $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(n) = 0$ **е)** $\mathbb{Z}/(m) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(n) \simeq \mathbb{Z}/(\text{НОД}(m, n))$
ж) $(K/I) \otimes_K (K/J) \simeq K/(I + J)$ для всех идеалов I, J любого коммутативного кольца K.

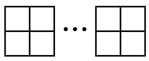
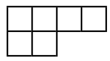
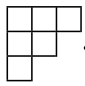
Всюду далее речь идёт про конечномерные векторные пространства над произвольным полем $\Bbbk$.

АС13◇5. Докажите, что среди векторов $v_1, \dots, v_n$, лежащих соответственно в пространствах $V_1, \dots, V_n$, тогда и только тогда есть нулевой вектор, когда все полилинейные отображения $V_1 \times \dots \times V_n \to W$ во все пространства W зануляются на наборе аргументов $(v_1, \dots, v_n)$.

АС13◇6. Пользуясь каноническим изоморфизмом $W \otimes U^* \simeq \mathrm{Hom}(U, W)$, запишем операторы $g : U \to V$ и $f : V \to W$ в виде $g = \sum_i v_i \otimes \varphi_i$, $f = \sum_j w_j \otimes \psi_j$ с $v_i \in V$, $\varphi_i \in U^*$, $w_j \in W$, $\psi_j \in V^*$. Запишите их композицию $fg \in \mathrm{Hom}(U, W) \simeq W \otimes U^*$ в виде **а)** $\sum_j w_j \otimes \xi_j$ **б)** $\sum_i u_i \otimes \varphi_i$, явно вычислив $\xi_j \in U^*$ и $u_i \in W$.

АС13◇7. Рассмотрим двойственные друг другу базисы $e_1, \dots, e_n$ и $x_1, \dots, x_n$ в V и в V^*. В какой оператор $V \to V$ переходит при изоморфизме из зад. АС13◇6 *тензор Казимира* $\sum x_i \otimes e_i$?

АС13◇8. Покажите, что линейное отображение $\tau : \mathrm{End}(V) \simeq V \otimes V^* \to (V \otimes V^*)^* \simeq \mathrm{End}(V)^*$, переводящее $v \otimes \xi$ в линейную форму $u \otimes \varphi \mapsto \xi(u) \cdot \varphi(v)$, корректно определено и задаёт на векторном пространстве $\mathrm{End}(V)$ корреляцию[1]. Какая билинейная форма на $\mathrm{End}(V)$ ей отвечает[2]? Вырождена ли она? Симметрична ли? Какую квадратичную форму задаёт?

АС13◇9. Опишите цикловой тип тензорного квадрата $f^{\otimes 2} : V^{\otimes 2} \to V^{\otimes 2}$ нильпотентного оператора $f : V \to V$ циклового типа **а)**  **б)**  **в)**  **г)** .

АС13◇10. Пусть операторы $f : U \to U$ и $g : W \to W$ диагонализуемы с собственными числами $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и $\mu_1, \dots, \mu_m$. Перечислите собственные числа оператора $f \otimes g$.

АС13◇11. Докажите для линейных отображений $f_1 : U_1 \to W_1$ и $f_2 : U_2 \to W_2$ равенства
а) $\mathrm{im}\, f_1 \otimes f_2 = \mathrm{im}\, f_1 \otimes \mathrm{im}\, f_2$ **б)** $\ker f_1 \otimes f_2 = \ker f_1 \otimes U_2 + U_1 \otimes \ker f_2$.

---

[1]Напомню, что *корреляцией* (или, на физической фене, *спуском индексов*) называется линейное отображение $\beta : V \to V^*$. Пространство корреляций изоморфно пространству билинейных форм $b : V \times V \to \Bbbk$. Изоморфизм переводит корреляцию β в форму $b(u, w) = \langle u, \beta(w) \rangle$ (свёртка вектора $u \in V$ и ковектора $\beta(w) \in V^*$). Билинейная форма b называется *вырожденной*, если существует такой вектор $u \neq 0$, что $b(u, v) = 0$ для всех v, и называется *симметричной*, если $b(u, w) = b(w, u)$ для всех u, w. Каждая билинейная форма $b : V \times V \to \Bbbk$ задаёт *квадратичную* форму $q_b : V \to \Bbbk$, $q_b(v) = b(v, v)$.

[2]Явно вычислите эту форму в терминах матриц операторов.