Группы преобразований

АС10◇1. Говорят, что группа G порождается элементами $g_1, \dots, g_k \in G$, если любой её элемент является конечным произведением элементов g_i. Порождается ли
а) S_n циклами $|1,2\rangle$ и $|1,2,3,\ \dots\ ,n\rangle$? **б)** A_n циклами $|1,2,3\rangle,\ |1,2,4\rangle,\ \dots\ ,\ |1,2,n\rangle$?

АС10◇2. Что можно сказать о чётности порядка произвольной нечётной перестановки?

АС10◇3. В группах **а)** S_3 **б)** S_4 **в)** S_5 **г)** S_6 перечислите классы сопряжённости и порядки элементов и найдите количества элементов в каждом классе и каждого порядка.

АС10◇4. Те же вопросы про группы **а)** A_4 **б)** A_5 **в)** A_6. Какие классы сопряжённости из S_n распадаются на несколько классов в A_n и как именно?

АС10◇5. Вычислите 2023-ю степень и знак перестановок: **а)** $(3,\ 5,\ 4,\ 1,\ 2)$ **б)** $(4,\ 5,\ 6,\ 1,\ 2,\ 3)$ **в)** $(4,\ 5,\ 12,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 11,\ 2,\ 3,\ 1,\ 10)$ **г)** $(13,\ 4,\ 5,\ 12,\ 6,\ 14,\ 7,\ 8,\ 9,\ 11,\ 2,\ 3,\ 1,\ 15,\ 10)$.

АС10◇6. Сколько элементов в S_6 неподвижны при сопряжении перестановками:
а) $(4,\ 5,\ 3,\ 6,\ 2,\ 1)$ **б)** $(4,\ 5,\ 6,\ 1,\ 2,\ 3)$ **в)** $(5,\ 6,\ 3,\ 4,\ 1,\ 6)$ **г)** $(4,\ 3,\ 2,\ 5,\ 6,\ 1)$?

АС10◇7. Перестановка $\sigma \in S_n$ называется *инволюцией*, если $\sigma^2 = \mathrm{Id}$. Верно ли, что **а)** любой цикл $\tau \in S_n$ длины $\geqslant 3$ является композицией двух инволюций? **б)** перестановка является инволюцией если и только если в её цикловом типе есть только циклы длины 1 и 2?

АС10◇8. Перечислите все подгруппы в группах диэдров D_n с $n \leqslant 6$. Какие из них нормальны?

АС10◇9. Всякая ли конечная группа, порождённая двумя различными нетождественными инволюциями, изоморфна группе диэдра?

АС10◇10. Изготовьте бумажные или какие-либо ещё модели пяти платоновых тел. Найдите длину орбиты и стабилизатор каждой точки каждого тела под действием собственной и несобственной групп этого тела. У каких платоновых тел полная группа изоморфна прямому произведению собственной группы на группу знаков $\{\pm 1\}$?

АС10◇11. Постройте изоморфизм собственной группы куба с S_4.

АС10◇12. Укажите на поверхности додекаэдра пять кубов с вершинами в вершинах додекаэдра и постройте изоморфизм собственной группы додекаэдра с A_5.

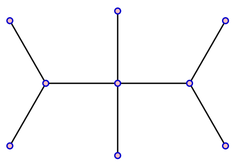
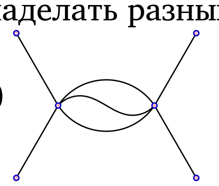
АС10◇13. Собственная группа куба действует на множествах V и E вершин и рёбер этого куба. Опишите орбиты её диагонального[1] действия на **а)** $V \times V$ **б)** $V \times E$ **в)** $E \times E \times E$.

АС10◇14. Найдите порядки собственной и несобственной групп **а)** пяти платоновых тел в $\mathbb{R}^3$ и правильных четырёхмерных **б)** куба **в)** кокуба[2] **г)** симплекса[3] **д*)** октаплекса[4].

АС10◇15. Изоморфны ли собственная и полная группы правильного n-мерного симплекса группам A_{n+1} и S_{n+1}?

АС10◇16. Имеется неограниченный запас неотличимых по форме бусин n разных цветов. Сколько различных ожерелий можно изготовить из **а)** 4 **б)** 7 **в)** 8 **г)** 9 бусин?

АС10◇17. Имеется неограниченный запас неразличимых по форме шнурочков n различных цветов. Сколько из них можно наделать разных фенечек вида

а)  **б)** 

АС10◇18. Найдите порядок группы **а)** $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)$ **б)** $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{F}_q)$ **в)** $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{F}_q)$.

---

[1] Если группа G действует на множествах $X_1, \dots, X_m$, то её *диагональное действие* на $X_1 \times \dots \times X_m$ происходит по правилу $g : (x_1, \dots, x_m) \mapsto (gx_1, \dots, gx_m)$.

[2] Выпуклой оболочки концов векторов $\pm e_i$, где e_1, e_2, e_3, e_4 образуют стандартный базис в $\mathbb{R}^4$.

[3] Выпуклой оболочки концов стандартных базисных векторов e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 в $\mathbb{R}^5$.

[4] Выпуклой оболочки вершин кокуба и вершин вписанного в единичную сферу куба $\{x \in \mathbb{R}^4 : \forall i\ |x_i| \leqslant 1/2\}$.