

Конечно порождённые абелевы группы

АС7♦1. Есть ли в абелевой группе $\mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(16)$ подгруппа, изоморфная

а) $\mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(8)$ б) $\mathbb{Z}/(4) \oplus \mathbb{Z}/(4)$ в) $\mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(2)$?

АС7♦2. Изоморфны ли абелевы группы $\mathbb{Z}/(6) \oplus \mathbb{Z}/(36)$ и $\mathbb{Z}/(12) \oplus \mathbb{Z}/(18)$?

АС7♦3. Сколько подгрупп порядков 2 и 6 в нециклической абелевой группе порядка 12?

АС7♦4. Напишите каноническое разложение¹ для аддитивных абелевых групп

а) $\mathbb{Z}/(6)$, $\mathbb{Z}/(12)$, $\mathbb{Z}/(24)$ и $\mathbb{Z}/(60)$ б) $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(15), \mathbb{Z}/(48))$ и $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(81), \mathbb{Z}/(9))$

в) $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(12) \oplus \mathbb{Z}/(16), \mathbb{Z}/(24))$ г) $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(6) \oplus \mathbb{Z}/(15), \mathbb{Z}/(20) \oplus \mathbb{Z}/(12))$

АС7♦5. Напишите каноническое разложение всех абелевых групп порядков

а) 4 б) 6 в) 8 г) 12 д) 16 е) 24 ж) 36 з) 48.

АС7♦6. Напишите каноническое разложение фактора решётки \mathbb{Z}^3 по подрешётке, порождённой векторами:

а) $(7, 2, 3)$, $(21, 8, 9)$, $(5, -4, 3)$ б) $(2, -4, 6)$, $(6, -6, 10)$, $(2, 5, 8)$, $(6, 0, 5)$

в) $(4, 5, 3)$, $(5, 6, 5)$, $(8, 7, 9)$ г) $(-81, -6, -33)$, $(60, 6, 24)$, $(-3, 6, -3)$, $(18, 6, 6)$

д) $(-62, -8, -26)$, $(40, 10, 16)$, $(22, -8, 10)$, $(20, 2, 8)$.

АС7♦7. Напишите каноническое разложение фактора решётки \mathbb{Z}^3 по подрешётке, задаваемой уравнениями:

$$\text{а) } \begin{cases} 686x_1 - 240x_2 + 122x_3 = 0 \\ 65x_1 - 24x_2 + 11x_3 = 0 \\ -159x_1 + 54x_2 - 29x_3 = 0 \\ -17x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} -143x_1 - 40x_2 + 36x_3 = 0 \\ -24x_1 - 6x_2 + 9x_3 = 0 \\ 48x_1 + 15x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 140x_1 - 175x_2 + 42x_3 = 0 \\ 43x_1 - 54x_2 + 13x_3 = 0. \end{cases}$$

АС7♦8. В абелевой группе, порождённой элементами a_1, a_2, a_3 , найдите порядок элемента

а) $a_1 + 2a_3$, если $a_1 + a_2 + 4a_3 = 2a_1 - a_2 + 2a_3 = 0$

б) $32a_1 + 31a_3$, если $2a_1 + a_2 - 50a_3 = 4a_1 + 5a_2 + 60a_3 = 0$.

АС7♦9. Выясните, отщепляется ли решётка, порождённая столбцами матрицы

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 107 & 60 & 19 & -13 \\ -50 & -28 & -9 & 6 \\ -7 & -4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 466 & -170 & -96 & -81 \\ -164 & 60 & 34 & 29 \\ 252 & -92 & -52 & -44 \end{pmatrix}.$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} 146 & -34 & -50 & -15 \\ 22 & -6 & -6 & -1 \\ -41 & 9 & 15 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{г) } \begin{pmatrix} -32 & 679 & 413 & 78 \\ -18 & 383 & 233 & 44 \\ 4 & -87 & -53 & -10 \end{pmatrix}.$$

прямым слагаемым в \mathbb{Z}^3 , и если да, укажите какую-нибудь дополнительную решётку.

¹Т. е. разложение в прямую сумму $\mathbb{Z}^r \oplus \bigoplus_{p, \mu} \mathbb{Z}/(p^\mu)$, где $\mu, p \in \mathbb{N}$ и все p простые.