Идеалы, фактор-кольца и разложение на множители

Максимальность, простота и неприводимость. В коммутативном кольце A с единицей собственный[1] идеал[2] $\mathfrak{a} \subset A$ называется *простым* (соотв. *максимальным*), если кольцо $A/\mathfrak{a}$ не имеет делителей нуля (соотв. является полем). Необратимый элемент $a \in A$ называется *простым*, если идеал $(a) \subset A$ прост, и *неприводимым*, если равенство $a = rs$ влечёт обратимость r или s.

АС4◇1. Опишите все идеалы в кольцах $\Bbbk[x]$ и $\Bbbk[\![x]\!]$, где $\Bbbk$ — поле. Какие из них максимальны? Какие просты?

АС4◇2. Являются ли $\mathbb{Q}[x, y]$ и $\mathbb{Z}[x]$ областями главных идеалов? Есть ли в них простые немаксимальные идеалы?

АС4◇3. Обязательно ли конечно кольцо $\mathbb{Z}[x]/(f, g)$, если $f, g \in \mathbb{Z}[x]$:
а) взаимно просты в $\mathbb{Q}[x]$? **б)** имеют $\text{НОД}(f, g) = 1$ в $\mathbb{Z}[x]$?

АС4◇4. Как устроено кольцо $\mathbb{Z}[x]/(2, x^2 - 5)$? Найдите в кольце $\mathbb{Z}[\sqrt{5}] = \mathbb{Z}[x]/(x^2 - 5)$
а) непростой неприводимый элемент[3]
б) элемент, имеющий два различных[4] разложения на неприводимые множители.

АС4◇5 (евклидовы кольца). Целостное коммутативное кольцо с единицей называется *евклидовым*, если на нём задана *функция высоты* $\nu : A \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, такая что $\nu(a) = 0 \iff a = 0$ и для любых $a, b \in A$ имеется такое $q \in A$, что $\nu(a - bq) < \nu(b)$. Покажите, что
а) каждое евклидово кольцо является областью главных идеалов
б) высоту на евклидовом кольце можно выбрать так, чтобы[5] $\nu(ab) \geqslant \nu(a)$ для всех a, b
в) при таком выборе высоты равенство $\nu(ab) = \nu(a)$ равносильно обратимости b.

АС4◇6 (гауссовы числа). Элементы кольца $\mathbb{Z}[i] \overset{\text{def}}{=} \mathbb{Z}[x]/(x^2 + 1) \simeq \{a + ib \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ называются *гауссовыми числами*. **а)** Нарисуйте в $\mathbb{C}$ все гауссовы числа, кратные $5 - i$ **б)** Найдите наименьшее $n \in \mathbb{N}$, кратное заданному $a + bi \in \mathbb{Z}[i]$, если $\text{НОД}(a, b) = 1$ и в общем случае. **в)** Покажите, что кольцо $\mathbb{Z}[i]$ евклидово с приведённой высотой $\nu(z) = |z|^2$. **г)** Найдите $\text{НОД}(5 + 3i, 6 - 4i)$. **д)** Разложите $3, 5, 7, 7 + i$ на простые множители в $\mathbb{Z}[i]$. **е)** Какие простые $p \in \mathbb{Z}$ остаются таковыми в $\mathbb{Z}[i]$?

АС4◇7 (числа Кронекера). Элементы кольца $\mathbb{Z}[\omega] \overset{\text{def}}{=} \mathbb{Z}[x]/(x^2 + x + 1)$ называются *числами Кронекера*. **а)** Покажите, что кольцо $\mathbb{Z}[\omega]$ евклидово с приведённой высотой $z \mapsto |z|^2$. **б)** Покажите, что простое $p \in \mathbb{Z}$ имеет вид $x^2 + xy + y^2$, где $x, y \in \mathbb{Z}$, если и только если $p = 3$ или $p \equiv 1 \pmod 3$. **в)** Какие простые $p \in \mathbb{Z}$ остаются таковыми в $\mathbb{Z}[\omega]$?

АС4◇8. Является ли кольцо $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \mathbb{Z}[x]/(x^2 - 2) \simeq \{a + b\sqrt{2} \in \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ евклидовым относительно высоты $\nu(a + b\sqrt{2}) = |a^2 - 2b^2|$?

АС4◇9. Убедитесь, что каждый гомоморфизм колец $\varphi : K \to L$ задаёт гомоморфизм колец многочленов $K[x] \to L[x]$, $f \mapsto f^\varphi$, состоящий в применении φ ко всем коэффициентам. Пусть оба кольца K, L целостные, и $f \in K[x]$ таков, что $\deg f^\varphi = \deg f$ и f^φ неприводим в $Q_L[x]$, где Q_L — поле частных кольца L. Докажите, что f неприводим в $K[x]$.

АС4◇10. Приводимы ли в $\mathbb{Q}[x]$ многочлены: **а)** $x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 6x + 2$ **б)** $x^5 - 12x^3 + 36x - 12$?

АС4◇11. В кольце $\mathbb{Z}[x]$ разложите на неприводимые множители или докажите неприводимость многочленов: **а)** $x^4 + x + 1$ **б)** $x^5 + x^4 + x^2 + x + 2$ **в)** $x^6 + x^3 + 1$ **г)** $x^{105} - 9$

---

[1] Т. е. отличный от всего кольца.

[2] Т. е. подкольцо, содержащее вместе с каждым своим элементом и все его кратные.

[3] При решении этой задачи полезно понятие *нормы* $\|a + b\sqrt{5}\| \overset{\text{def}}{=} (a + b\sqrt{5})(a - b\sqrt{5}) = a^2 - 5b^2$ и то, что *норменное отображение* $z \mapsto \|z\|$ является мультипликативным гомоморфизмом $\mathbb{Z}[\sqrt{5}] \to \mathbb{Z}$.

[4] Т. е. сомножители разложений нельзя привести в биективное соответствие друг с другом так, чтобы соответственные множители получались друг из друга умножением на обратимый элемент кольца.

[5] Такая высота ν называется *приведённой*. Положите $\nu(a) = \min_{b \neq 0} \nu'(ab)$, где ν' — произвольная высота.