Тензорная, симметрическая и грассманова алгебры

АЛ11⋄1. Пусть $v \in V$ и $\omega \in \Lambda^k V$. При каких k равенства $v \wedge \omega = 0$ и $\omega = v \wedge \eta$ равносильны?

АЛ11⋄2. Верно ли, что

а) $S^n(V_1 \oplus \ldots \oplus V_k) \simeq \bigoplus_{m_1,\ldots,m_k} S^{m_1}V_1 \otimes \ldots \otimes S^{m_k}V_k$

б) $\Lambda^n(V_1 \oplus \ldots \oplus V_k) \simeq \bigoplus_{m_1,\ldots,m_k} \Lambda^{m_1}V_1 \otimes \ldots \otimes \Lambda^{m_k}V_k$

(суммирование идёт по всем $m_1, \ldots, m_k$ с $m_1 + \ldots + m_k = n$ и $0 \leqslant m_i \leqslant n$)?

АЛ11⋄3*. Пусть набор векторов $\boldsymbol{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ произволен, а $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ линейно независим. Докажите, что $u_1 \wedge w_1 + \ldots + u_n \wedge w_n = 0$ если и только если $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}\,A$ для симметричной матрицы $A \in \mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$.

АЛ11⋄4. Для линейного оператора $F : V \to V$ выразите через коэффициенты характеристического многочлена $\chi_F(t)$ числа: **а)** $\operatorname{tr} F^{\otimes 2}$ **б*)** $\operatorname{tr} F^{\otimes 3}$ **в)** $\det F^{\otimes 2}$ **г*)** $\det F^{\otimes 3}$.

АЛ11⋄5. Пусть линейный оператор $F : V \to V$ диагонализуем. Положим

$$S^k F : S^k V \to S^k V\,, \quad v_1 \ldots v_k \mapsto F(v_1) \ldots F(v_k)\,,$$
$$\Lambda^k F : \Lambda^k V \to \Lambda^k V\,, \quad v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \mapsto F(v_1) \wedge \ldots \wedge F(v_k)\,.$$

Выразите собственные числа этих операторов через собственные числа F и докажите в $\Bbbk[\![t]\!]$ равенства: **а)** $\det(E - tF)^{-1} = \sum_{k \geqslant 0} \operatorname{tr}(S^k F)\, t^k$ **б)** $\det(E + tF) = \sum_{k \geqslant 0} \operatorname{tr}(\Lambda^k F)\, t^k$.

АЛ11⋄6*. Верны ли равенства из зад. АЛ11⋄5 также и для недиагонализуемых F?

АЛ11⋄7. Пусть $\operatorname{char} \Bbbk = 0$ и $\operatorname{tr} \Lambda^k F = 0$ при всех $k \geqslant 1$. Верно ли, что F нильпотентен?

АЛ11⋄8. Пусть $\dim V = d \geqslant 2$. Какие значения может принимать $\operatorname{rk} \Lambda^{d-1} F$?

АЛ11⋄9. Фиксируем ненулевой вектор $u \in V$. Оператор $\iota_u : V^{*\otimes n} \to V^{*\otimes n-1}$, двойственный[1] оператору $\lambda_u : V^{\otimes(n-1)} \to V^{\otimes n}$, $w \mapsto u \otimes w$, левого тензорного умножения на u, называется *внутренним умножением* на u. Явно опишите его действие на заданную n-линейную форму $\varphi : V \times \ldots \times V \to \Bbbk$, рассматриваемую как тензор $\varphi \in V^{*\otimes n}$. Бывает ли ι_u не эпиморфен?

АЛ11⋄10. Пусть $\operatorname{char} \Bbbk = 0$, так что $(S^n V)^* \simeq S^n(V^*)$ и $(\Lambda^n V)^* \simeq \Lambda^n(V^*)$. Фиксируем ненулевой вектор $u \in V$. Есть ли связь между оператором ∂_u дифференцирования многочленов в направлении вектора[2] u и операторами **а)** $S^n V^* \to S^{n-1} V^*$ **б)** $\Lambda^n V^* \to \Lambda^{n-1} V^*$, двойственными к операторам $S^{n-1} V \to S^n V$ и $\Lambda^{n-1} V \to \Lambda^n V$ левого умножения на u?

АЛ11⋄11 (комплексы Де Рама и Кошуля). Фиксируем в V^* базис $x_1, \ldots, x_n$ и положим

$$d \overset{\text{def}}{=} \sum x_i \otimes \partial/\partial x_i : \Lambda^k V^* \otimes S^m V^* \to \Lambda^{k+1} V^* \otimes S^{m-1} V^*\,,\ \omega \otimes f \mapsto \sum\nolimits_i x_i \wedge \omega \otimes \partial f/\partial x_i\,,$$
$$\partial \overset{\text{def}}{=} \sum \partial/\partial x_i \otimes x_i : \Lambda^k V^* \otimes S^m V^* \to \Lambda^{k-1} V^* \otimes S^{m+1} V^*\,,\ \omega \otimes f \mapsto \sum\nolimits_i \partial\omega/\partial x_i \otimes x_i\, f\,.$$

Покажите, что эти операторы **а*)** не зависят от выбора базиса **б)** удовлетворяют равенствам $d^2 = 0$, $\partial^2 = 0$, $d\partial + \partial d = (k+m)\,\mathrm{Id}_{\Lambda^k V \otimes S^m V}$. **в*)** Вычислите $\ker d/\operatorname{im} d$ и $\ker \partial/\operatorname{im} \partial$.

АЛ11⋄12. Пусть $\operatorname{char} \Bbbk = 0$. Докажите для любого $f \in S^n V^*$ и всех $u, w \in V$ равенства

а) $f(u+w) = \sum_k \partial_w^k f(u)/k!$ **б)** $(n-k)!\,\partial_u^k f(w) = n!\,\widetilde{f}(u^k, w^{n-k}) = k!\,\partial_w^{n-k} f(u)$

в) $\widetilde{f}(v_1, \ldots, v_n) = \partial_{v_1} \ldots \partial_{v_n} f/n!$, где $\widetilde{f} : V \times \ldots \times V \to \Bbbk$ — полная поляризация многочлена f.

АЛ11⋄13*. Докажите, что $\det(\alpha A + \beta B) = \sum_{p=0}^{n} \operatorname{tr}(\Lambda^p A \cdot \Lambda^p B^\vee)\, \alpha^p \beta^{n-p}$ для всех чисел $\alpha, \beta \in \Bbbk$ и матриц $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$, где $\Lambda^p A$ и $\Lambda^p B^\vee$ — квадратные матрицы размера $\binom{n}{p}$, клетки которых занумерованы возрастающими p-элементными подмножествами $I, J \subset \{1, \ldots, n\}$, и в IJ-той клетке у $\Lambda^p A$ находится IJ-тый $p \times p$ минор a_{IJ} матрицы A, а у $\Lambda^p B^\vee$ — алгебраическое дополнение $(-1)^{|I|+|J|} b_{\overline{IJ}}$ к IJ-му $p \times p$ минору матрицы B.

[1] При каноническом отождествлении $V^{*\otimes n *}$ с $V^{\otimes n}$ посредством полной свёртки.

[2] Напомню, что если $e_1, \ldots, e_d \in V$ и $x_1, \ldots, x_n \in V^*$ — двойственные базисы, а $u = a_1 e_1 + \ldots + a_d e_d$, где $a_i \in \Bbbk$, то $\partial_u f \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{d} a_i \partial f/\partial x_i$.

Персональный табель ____.
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 11 (10.4.2023)

№	дата	кто принял	подпись
1			
2а			
б			
3			
4а			
б			
в			
г			
5а			
б			
6			
7			
8			
9			
10а			
б			
11а			
б			
в			
12а			
б			
в			
13			