Строение групп

АЛ9◇1. Докажите, что ядро действия группы G левыми умножениями на множестве смежных классов G/H произвольной подгруппы $H \subset G$ является единственной максимальной по включению нормальной подгруппой $N \lhd G$, содержащейся в H.

АЛ9◇2. Докажите, что при $n \geqslant 5$ индекс любой подгруппы $H \subsetneq A_n$ не меньше n.

АЛ9◇3. Докажите, что неабелева простая группа, обладающая подгруппой индекса n, гомоморфно вкладывается в A_n.

АЛ9◇4 (разрешимые группы). Докажите, что следующие свойства группы G эквивалентны:
- **а)** существует цепочка подгрупп $G = G_0 \rhd G_1 \rhd \ldots \rhd G_{n-1} \rhd G_n = e$ с абелевыми G_i/G_{i+1}
- **б)** последовательные коммутаторы $G, G', G'', G''', \ldots$ тривиализуются на конечном шагу.

АЛ9◇5. Пусть $N \lhd G$ и $H = G/N$. Верно ли, что если две из групп N, G, H разрешимы, то разрешима и третья?

АЛ9◇6. Разрешимы ли при простых p, q, r все группы порядка **а)** pq **б)** pq^2 **в)** pqr?

АЛ9◇7*. Докажите, что любая p-группа разрешима[1].

АЛ9◇8*. Докажите, что все группы порядка < 60 разрешимы[2].

АЛ9◇9*. Докажите, что неразрешимая группа порядка 60 изоморфна A_5[3].

АЛ9◇10. Для группы $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ укажите **а)** все силовские подгруппы **б)** два разных композиционных ряда.

АЛ9◇11. Перечислите с точностью до изоморфизма все группы порядка
а) 8 **б)** 12 **в)** $\leqslant 15$ **г*)** 105.

АЛ9◇12* (системы Штейнера). Набор S из k-элементных подмножеств n-элементного множества X называется *системой Штейнера* $S(t, k, n)$, если каждое t-элементное подмножество в X содержится ровно в одном множестве из S. Например, множество аффинных прямых на координатной плоскости над полем $\mathbb{F}_5$ является системой $S(2, 5, 25)$.
- **а)** По системе Штейнера $S(t, k, n)$ постройте систему $S(t-1, k-1, n-1)$.
- **б)** Для всех $q = p^k$, где p — простое, постройте системы $S(2, q, q^2)$ и $S(2, q+1, q^2+q+1)$.
- **в)** Покажите, что образы множества квадратов $\{0, 1, 4, 9, 3, 5\}$ поля $\mathbb{F}_{11}$ под действием группы $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{11})$ дробно линейных преобразований проективной прямой $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_{11}) = \{0, 1, \ldots, 10, \infty\}$ составляют систему Штейнера $S(5, 6, 12)$.
- **г)** Постройте систему Штейнера $S(5, 8, 24)$.

АЛ9◇13*. Для системы Штейнера $S = S(t, k, n)$ положим $\mathrm{Aut}\, S \overset{\text{def}}{=} \{g \in S_n \mid \forall\, Y \in S \;\; g(Y) \in S\}$. Постройте изоморфизмы:
а) $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{F}_4)$ с $\mathrm{Aut}\, S(2, 5, 21)$ **б)** A_6 с коммутантом $\mathrm{Aut}'\, S(3, 4, 10)$.

АЛ9◇14*. Найдите порядки *спорадических простых групп Матьё*[4]:
а) $M_{11} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Aut}\, S(4, 5, 11)$ **б)** $M_{12} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Aut}\, S(5, 6, 12)$ **в)** $M_{22} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Aut}\, S(3, 6, 22)$
г) $M_{23} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Aut}\, S(4, 7, 23)$ **д)** $M_{24} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Aut}\, S(5, 8, 24)$.

АЛ9◇15*. Покажите, что M_{11}, M_{22} и M_{23} суть стабилизаторы точек тавтологических действий M_{12}, M_{23} и M_{24} на соответствующих системах Штейнера.

---

1 ПОДСКАЗКА: вложите её в S_n, а S_n — в $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$, и примените теорему Силова.

2 ПОДСКАЗКА: $\exists\, p : N_p < 4$.

3 ПОДСКАЗКА: рассмотрите её действие на силовских 5-подгруппах.

4 ОТВЕТЫ: 7920, 95 040, 443 520, 10 200 960, 244 823 040.

Персональный табель ______________________________________.
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 9 (23.2.2023)

№	дата	кто принял	подпись
1			
2			
3			
4а			
б			
5			
6а			
б			
в			
7			
8			
9			
10а			
б			
11а			
б			
в			
г			
12а			
б			
в			
г			
13а			
б			
14а			
б			
в			
г			
д			
15			