Модули, алгебры, матрицы

АЛ5◇1 (нётеровы модули). Докажите, что следующие свойства модуля M над произвольным коммутативным кольцом эквивалентны[1]:

а) любое множество векторов $X \subset M$ содержит конечное подмножество, линейная оболочка которого совпадает с линейной оболочкой всего X

б) каждый подмодуль $N \subseteq M$ конечно порождён

в) каждая возрастающая цепочка вложенных подмодулей $N_1 \subseteq N_2 \subseteq N_3 \subseteq \ldots \subseteq M$ стабилизируется, т. е. существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $N_\nu = N_n$ при $\nu \geqslant n$.

АЛ5◇2. Покажите, что каждый конечно порождённый модуль над нётеровым кольцом **а)** нётеров **б)** все его подмодули и фактор модули конечно порождены.

АЛ5◇3. Пусть фактор модуль $L = M/N$ свободен. Верно ли, что $M \simeq N \oplus L$?

АЛ5◇4. Сколько различных разложений в прямую сумму двух подгрупп имеет абелева группа $\mathbb{Z}/(5) \oplus \mathbb{Z}/(5)$?

АЛ5◇5. Пусть порядки[2] конечных подгрупп $A_1, \ldots, A_n$ абелевой группы A попарно взаимно просты. Докажите, что их сумма в A является прямой.

АЛ5◇6. Верно ли, что порождённый вектором $w = (z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{Z}^m$ подмодуль $\mathbb{Z}w \subset \mathbb{Z}^m$ отщепляется прямым слагаемым[3] если и только если $\text{НОД}(z_1, \ldots, z_m) = 1$?

АЛ5◇7 (целозначные многочлены). Пусть $M_n = \{f \in \mathbb{Q}[x] \mid \deg f \leqslant n \text{ и } \forall z \in \mathbb{Z}\ f(z) \in \mathbb{Z}\}$ и $\gamma_k(x) = \binom{x+k}{k} = (x+1) \cdot \ldots \cdot (x+k)/k!$, где $1 \leqslant k \leqslant n$, а $\gamma_0(x) = 1$. Покажите, что γ_k линейно независимы над $\mathbb{Z}$, выясните, как на них действует оператор $\nabla : f(x) \mapsto f(x) - f(x-1)$, и докажите, что любой многочлен $f \in M_n$ имеет вид $f = \sum_{k\geqslant 0} \nabla^k f(-1)\,\gamma_k$. Сколько элементов в фактор модуле $M_n/(M_n \cap \mathbb{Z}[x])$?

АЛ5◇8 (проекторы). Пусть K-линейный эндоморфизм $f : M \to M$ имеет $f^2 = f$. Покажите, что $M = \ker f \oplus \operatorname{im} f$ и что f проектирует M на $\operatorname{im} f$ вдоль $\ker f$. Что делает $1 - f$?

АЛ5◇9. Докажите, что каждая 2×2 матрица с элементами из произвольного коммутативного кольца с единицей удовлетворяет приведённому квадратному уравнению и решите в $\operatorname{Mat}_2(\mathbb{Q})$ уравнения **а)** $X^2 = 0$ **б)** $X^3 = 0$ **в)** $X^2 = X$ **г)** $X^2 = E$ **д)** $X^2 = -E$.

АЛ5◇10* (обращение Мёбиуса в ЧУМе**).** Пусть в ЧУМе[4] P с отношением $x \leqslant y$ существует такой $m \in P$, что $m \leqslant x$ для всех $x \in P$, и для всех $x < y$ множество $\{z \in P \mid x \leqslant z \leqslant y\}$ конечно. Обозначим через $A = A(P)$ множество всех таких функций $\varrho : P \times P \to \mathbb{C}$, что $\varrho(x, y) = 0$, если отношение $x \leqslant y$ не выполнено. Покажите, что **а)** сумма и произведение

$$\varrho_1 + \varrho_2 : (x, y) \mapsto \varrho_1(x, y) + \varrho_2(x, y) \quad \text{и}^{5} \quad \varrho_1\varrho_2 : (x, y) \mapsto \sum_{x\leqslant z\leqslant y} \varrho_1(x, z)\varrho_2(z, y)$$

задают на A структуру ассоциативной $\mathbb{C}$-алгебры с единицей **б)** функция $\varrho \in A$ обратима если и только если $\varrho(x, x) \neq 0$ для всех $x \in P$ **в)** существует функция[6] $\mu \in A$, обратная к функции $\zeta \in A$, равной 1 для всех $x \leqslant y$, причём $\mu(x, x) = 1$ для всех $x \in P$ и $\mu(x, y) = -\sum_{x\leqslant z<y} \mu(x, z) = -\sum_{x<z\leqslant y} \mu(z, y)$ для всех $x < y$ **г)** если для функции $g : P \to \mathbb{C}$ известны значения всех сумм $\sigma_g(x) = \sum_{y\leqslant x} g(y)$, то g однозначно восстанавливается из них по *формуле обращения Мёбиуса*: $g(x) = \sum_{y\leqslant x} \sigma_g(y)\,\mu(y, x)$.

---

[1] Обладающие этими свойствами модули называются *нётеровыми*.

[2] *Порядком* конечной группы называется количество элементов в ней.

[3] Т. е. существует такой $\mathbb{Z}$-подмодуль $N \subset \mathbb{Z}^m$, что $\mathbb{Z}^m = \mathbb{Z}w \oplus N$.

[4] Т. е. в частично упорядоченном множестве.

[5] Поучительно сравнить это умножение с умножением комплексных верхнетреугольных матриц.

[6] Она называется *функцией Мебиуса* ЧУМа P.

АЛ5⋄11*. Убедитесь, что условия зад. АЛ5⋄10 выполнены для **а)** множества $\mathbb{N}$ с отношением $n|m$ **б)** множества всех конечных подмножеств с отношением $N \subseteq M$ в любом множестве X и явно опишите для них функции Мёбиуса и формулы обращения[7].

[7]Ответы в (б) поучительно сравнить с комбинаторными формулами включения-исключения.

Персональный табель ______________________________________. **Листок № 5 (7.11.2022)**

(напишите свои имя, отчество и фамилию)

№	дата	кто принял	подпись
1			
2а			
б			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9а			
б			
в			
г			
д			
10а			
б			
в			
г			
11а			
б			