Многочлены и комплексные числа

АЛ2⋄1 (минимальный многочлен). Пусть поле $\Bbbk$ является подполем поля $\mathbb{K}$. Число $\alpha \in \mathbb{K}$ называется *алгебраическим* над $\Bbbk$, если $f(\alpha) = 0$ для некоторого многочлена $f \in \Bbbk[x]$. Приведённый многочлен наименьшей степени с таким свойством называется *минимальным многочленом* алгебраического числа $\alpha \in \mathbb{K}$ над полем $\Bbbk$. Докажите, что в $\Bbbk[x]$ минимальный многочлен неприводим и делит все многочлены с корнем α.

АЛ2⋄2. Найдите минимальный многочлен числа **а)** $2 - 3i \in \mathbb{C}$ над $\mathbb{R}$ **б)** $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{R}$ над $\mathbb{Q}$.

АЛ2⋄3. Могут ли два разных приведённых неприводимых многочлена $f, g \in \mathbb{Q}[x]$ одинаковой степени $\deg f = \deg g \geqslant 2$ задавать изоморфные поля $\mathbb{Q}[x]/(f)$ и $\mathbb{Q}[x]/(g)$?

АЛ2⋄4. Пусть $\Bbbk$ — поле характеристики $p > 0$ и $a \in \Bbbk$. Верно ли, что многочлен $x^p - a$ либо неприводим в $\Bbbk[x]$, либо имеет p-кратный корень в $\Bbbk$?

АЛ2⋄5*. Над любым ли конечным полем $\Bbbk$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ имеется неприводимый в $\Bbbk[x]$ многочлен степени n?

АЛ2⋄6. Выражаются ли в радикалах вещественные и мнимые части корней квадратного трёхчлена из $\mathbb{C}[x]$ через вещественные и мнимые части его коэффициентов?

АЛ2⋄7. Вычислите в радикалах: **а)** $\cos(\pi/9)$ **б)** $\cos(\pi/12)$ **в*)** $\cos(\pi/7)$.

АЛ2⋄8. Для всех $n, s \in \mathbb{N}$ вычислите в поле $\mathbb{C}$ **а)** сумму **б)** произведение s-тых степеней всех корней n-той степени из 1.

АЛ2⋄9. Покажите, что $\sin mx / \sin x$ при нечётном $m \in \mathbb{N}$ является многочленом от $\sin^2 x$ и найдите степень, корни и старший коэффициент этого многочлена.

АЛ2⋄10* (эйлеровы разложения). При помощи предыдущей задачи докажите тождества

а) $\dfrac{\sin(mx)}{\sin x} = (-4)^{\frac{m-1}{2}} \prod\limits_{j=1}^{\frac{m-1}{2}} \left(\sin^2 x - \sin^2\left(\frac{2\pi j}{m}\right)\right)$ **б)** $(-1)^{\frac{m-1}{2}} \sin(mx) = 2^{m-1} \prod\limits_{j=0}^{m-1} \sin\left(x + \frac{2\pi j}{m}\right)$

АЛ2⋄11 (квадратичная взаимность по Эйзенштейну). Зафиксируем простое $p \in \mathbb{N}$. Число

$$\left(\frac{n}{p}\right) \overset{\text{def}}{=} [n]_p^{(p-1)/2} = \begin{cases} 1 & \text{если } [n] \text{ ненулевой квадрат в } \mathbb{F}_p \\ 0 & \text{если } [n] = [0] \text{ в } \mathbb{F}_p \\ -1 & \text{если } [n] \text{ не квадрат в } \mathbb{F}_p \end{cases}$$

называется *символом Лежандра* числа n по модулю p.

а) Докажите, что $\left(\frac{mn}{p}\right) = \left(\frac{m}{p}\right)\left(\frac{n}{p}\right)$. **б)** Вычислите $\sum_{n=1}^{p-1} \left(\frac{n}{p}\right)$.

в*) Сравните знак $\left(\frac{m}{p}\right)$ со знаком произведения $\prod_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} \sin(2\pi mj/p)/\sin(2\pi j/p)$, разложите в нём каждое отношение синусов по формулам из зад. АЛ2⋄10 и докажите для простых натуральных $p, q > 2$ *квадратичный закон взаимности*: $\left(\frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$.

г*) Найдите $\left(\frac{43}{179}\right)$.

АЛ2⋄12 (учите анализ). Для произвольного $f \in \mathbb{C}[x]$ положительной степени докажите, что:

а) для любого $c \in \mathbb{R}$ найдётся такой круг $D \subset \mathbb{C}$, что $|f(z)| > c$ для всех $z \notin D$

б*) в любом круге $D \subset \mathbb{C}$ есть такая точка $z_0 \in D$, что $|f(z)| \geqslant |f(z_0)|$ для всех $z \in D$

в*) существует такое $z_0 \in \mathbb{C}$, что $|f(z)| \geqslant |f(z_0)|$ для всех $z \in \mathbb{C}$

г*) если $f(z_0) \neq 0$, то вблизи z_0 найдётся такое $z \in \mathbb{C}$, что $|f(z)| < |f(z_0)|$

д*) f имеет корень в $\mathbb{C}$.

Персональный табель ______________________________________.
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 2 (16.09.2022)

№	дата	кто принял	подпись
1			
2а			
б			
3			
4			
5			
6			
7а			
б			
в			
8а			
б			
9			
10а			
б			
11а			
б			
в			
г			
12а			
б			
в			
г			
д			