§9. Пространство с оператором

9.1. Классификация пространств с оператором. Пусть $\Bbbk$ — произвольное поле, V — конечномерное векторное пространство над $\Bbbk$, а $F : V \to V$ — линейный эндоморфизм пространства V. Мы будем называть пару (F, V) *пространством с оператором* или просто *оператором* над $\Bbbk$. Линейное отображение $C : U_1 \to U_2$ между пространствами с операторами (F_1, U_1) и (F_2, U_2) называется *гомоморфизмом*, если $F_2 \circ C = C \circ F_1$. В этом случае говорят, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} U_1 \arrow[r, "C"] & U_2 \\ U_1 \arrow[u, "F_1"] \arrow[r, "C"'] & U_2 \arrow[u, "F_2"'] \end{tikzcd}$$

коммутативна[1]. Если гомоморфизм C биективен, операторы $F_1 : U_1 \to U_1$ и $F_2 : U_2 \to U_2$ называются *изоморфными* или *подобными*. Поскольку в этом случае $F_2 = CF_1C^{-1}$, то говорят, что оператор F_2 получается из F_1 *сопряжением* посредством изоморфизма C.

Подпространство $U \subset V$ называется *F-инвариантным*, если $F(U) \subset U$. В этом случае пара $(F|_U, U)$ тоже является пространством с оператором и вложение $U \hookrightarrow V$ представляет собою гомоморфизмом пространств с операторами. Оператор, не имеющий инвариантных подпространств, отличных от нуля и всего пространства, называется *неприводимым* или *простым*.

Упражнение 9.1. Покажите, что оператор умножения на класс $[t]$ в фактор кольце $\mathbb{R}[t]/(t^2+1)$ неприводим.

Оператор $F : V \to V$ называется *разложимым*, если V раскладывается в прямую сумму двух ненулевых F-инвариантных подпространств, и *неразложимым* — в противном случае. Все простые операторы неразложимы.

Упражнение 9.2. Покажите, что оператор умножения на класс $[t]$ в фактор кольце $\Bbbk[t]/(t^n)$ при всех $n > 1$ приводим, но неразложим.

Таким образом, над любым полем $\Bbbk$ имеются неразложимые пространства с оператором любой размерности. Очевидно, что всякое пространство с оператором является прямой суммой неразложимых.

9.1.1. Пространство с оператором как $\Bbbk[t]$-модуль. Задание на пространстве V линейного оператора $F : V \to V$ эквивалентно заданию на V структуры модуля над кольцом многочленов $\Bbbk[t]$. В самом деле, структура $\Bbbk[t]$-модуля включает в себя операцию умножения векторов на переменную t: $v \mapsto tv$, которая является линейным отображением $V \to V$. Если обозначить его буквой F, то умножение векторов на произвольный многочлен $f(t) = a_0 + a_1t + \ldots + a_mt^m$ происходит по правилу $f(t)\,v = a_0v + a_1Fv + \ldots + a_mF^mv = f(F)\,v$, где

$$f(F) = a_0\mathrm{Id}_V + a_1F + \ldots + a_mF^m$$

есть результат вычисления многочлена f на элементе F в $\Bbbk$-алгебре $\mathrm{End}(V)$. Наоборот, каждый линейный оператор $F : V \to V$ задаёт на V структуру $\Bbbk[t]$-модуля, в котором умножение вектора $v \in V$ на многочлен $f(t) \in \Bbbk[t]$ происходит по формуле $f(t)\,v \stackrel{\text{def}}{=} f(F)\,v$. Мы будем обозначать такой $\Bbbk[t]$-модуль через V_F.

[1] Произвольная диаграмма отображений называется *коммутативной*, если композиции отображений вдоль любых двух путей с общим началом и концом одинаковы.

Гомоморфизм $C : V_F \to W_G$ между $\Bbbk[t]$-модулями, которые задаются линейными операторами $F : V \to V$ и $G : W \to W$, представляет собою $\Bbbk$-линейное отображение $C : V \to W$, перестановочное с умножением векторов на t, т. е. такое что $C \circ F = F \circ C$. Поэтому операторы F и G изоморфны если и только если изоморфны $\Bbbk[t]$-модули V_F и W_G.

Векторное подпространство $U \subset V$ является $\Bbbk[t]$-подмодулем в модуле V_F если и только если оператор умножения на t переводит U в себя, т. е. тогда и только тогда, когда это подпространство F-инвариантно. Аналогично, разложимость V в прямую сумму инвариантных подпространств означает разложимость $\Bbbk[t]$-модуля V_F в прямую сумму $\Bbbk[t]$-подмодулей.

Если векторное пространство V конечномерно над $\Bbbk$, то $\Bbbk[t]$-модуль V_F является конечно порождённым модулем кручения. В самом деле, любой базис пространства V над $\Bbbk$ линейно порождает модуль V_F над $\Bbbk[t]$, и в каноническом разложении модуля V_F в прямую сумму свободного модуля и модуля кручения[1] свободное слагаемое отсутствует, поскольку оно бесконечномерно как векторное пространство над $\Bbbk$. Из теоремы об элементарных делителях[2] вытекает

Теорема 9.1
Любой линейный оператор в конечномерном векторном пространстве над произвольным полем $\Bbbk$ подобен оператору умножения на класс $[t]$ в прямой сумме фактор колец

$$\Bbbk[t]/(p_1^{m_1}(t)) \oplus \ldots \oplus \Bbbk[t]/(p_k^{m_k}(t))\,, \tag{9-1}$$

где все многочлены $p_\nu(t) \in \Bbbk[t]$ приведены и неприводимы, и слагаемые могут повторяться. Операторы умножения на класс $[t]$, действующие в суммах

$$\Bbbk[t]/(p_1^{m_1}(t)) \oplus \ldots \oplus \Bbbk[t]/(p_k^{m_k}(t)) \quad \text{и} \quad \Bbbk[t]/(q_i^{n_1}(t)) \oplus \ldots \oplus \Bbbk[t]/(q_\ell^{n_\ell}(t))$$

изоморфны если и только если $k = \ell$ и прямые слагаемые можно переставить так, чтобы $p_\nu = q_\nu$ и $m_\nu = n_\nu$ при всех ν. □

Определение 9.1 (элементарные делители линейного оператора)
Дизъюнктное объединение[3] всех многочленов $p_\nu^{m_\nu}$, стоящих в правой части разложения (9-1), называется *набором элементарных делителей* оператора $F : V \to V$ и обозначается через $\mathcal{E}\ell(F)$.

Следствие 9.1
Линейные операторы F и G подобны тогда и только тогда, когда $\mathcal{E}\ell(F) = \mathcal{E}\ell(G)$. □

Следствие 9.2
Линейный оператор неразложим тогда и только тогда, когда он подобен оператору умножения на класс $[t]$ в фактор кольце $\Bbbk[t]/(p^m)$, где $p \in \Bbbk[t]$ неприводим и приведён. Неразложимый оператор неприводим если и только если $m = 1$. □

Следствие 9.3
Многочлен $f \in \Bbbk[t]$ тогда и только тогда аннулирует оператор $F : V \to V$, когда он делится на все элементарные делители оператора F. □

Упражнение 9.3. Пусть пространство с оператором (F, V) разлагается в прямую сумму F-инвариантных подпространств U_i. Покажите, что $\mathcal{E}\ell(F) = \bigsqcup_i \mathcal{E}\ell(F|_{U_i})$.

[1] См. теор. 6.5 на стр. 119.
[2] См. теор. 6.4 на стр. 118.
[3] Каждый элементарный делитель p^m входит в него ровно столько раз, сколько прямых слагаемых вида $\Bbbk[t]/(p^m)$ имеется в разложении (9-1).

9.1.2. Отыскание элементарных делителей. Фиксируем в пространстве V какой-либо базис $\boldsymbol{v} = (v_1, \dots, v_n)$ над полем $\Bbbk$ и обозначим через $F_{\boldsymbol{v}} \in \mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$ матрицу оператора $F : V \to V$ в этом базисе. Напомню[1], что она однозначно определяется тем, что $F(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}\, F_{\boldsymbol{v}}$ или, подробнее,

$$(F(v_1), \dots, F(v_n)) = (v_1, \dots, v_n)\, F_{\boldsymbol{v}}\,.$$

Так как векторы v_i линейно порождают пространство V над $\Bbbk$, они тем более порождают модуль V_F над $\Bbbk[t]$, и $V_F = \Bbbk[t]^n/R_{\boldsymbol{v}}$, где подмодуль $R_{\boldsymbol{v}} = \ker \pi_{\boldsymbol{v}} \subset \Bbbk[t]^n$ является ядром эпиморфизма[2] $\pi_{\boldsymbol{v}} : \Bbbk[t]^n \to V_F$, переводящего стандартный базисный вектор $e_i \in \Bbbk[t]^n$ в вектор $v_i \in V$, и состоит из всех $\Bbbk[t]$-линейных соотношений между векторами $\boldsymbol{v}$ в V_F. Таким образом, $\mathcal{E}\ell(F)$ является множеством элементарных делителей, ассоциированным в смысле n° 6.3 на стр. 117 с набором инвариантных множителей подмодуля $R_{\boldsymbol{v}} \subset \Bbbk[t]^n$.

Лемма 9.1

Если записывать элементы свободного модуля $\Bbbk[t]^n$ в виде координатных столбцов с элементами из $\Bbbk[t]$, то подмодуль соотношений $\ker \pi_{\boldsymbol{v}} \subset \Bbbk[t]^n$ линейно порождается над $\Bbbk[t]$ столбцами матрицы $tE - F_{\boldsymbol{v}}$.

Доказательство. Пусть $F_{\boldsymbol{v}} = \left(f_{ij}\right)$. Тогда j-й столбец матрицы $tE - F_{\boldsymbol{v}}$ выражается через стандартный базис $\boldsymbol{e}$ модуля $\Bbbk[t]^n$ как $te_j - \sum_{i=1}^n e_i f_{ij}$. Применяя к этому вектору гомоморфизм $\pi_{\boldsymbol{v}}$, получаем $\pi_{\boldsymbol{v}}\left(te_j - \sum_{i=1}^n e_i f_{ij}\right) = tv_j - \sum_{i=1}^n v_i f_{ij} = Fv_j - \sum_{i=1}^n v_i f_{ij} = 0$. Тем самым, все столбцы матрицы $tE - F_{\boldsymbol{v}}$ лежат в $\ker \pi_{\boldsymbol{v}}$. Рассмотрим теперь произвольный вектор $h \in \ker \pi_{\boldsymbol{v}} \subset \Bbbk[t]^n$ и запишем его в виде многочлена от t с коэффициентами в $\Bbbk^n$ (ср. с n° 8.4.3 на стр. 142):

$$h = t^m h_m + t^{m-1} h_{m-1} + \ldots + th_1 + h_0\,, \text{ где } h_i \in \Bbbk^n\,.$$

Этот многочлен можно поделить с остатком слева на многочлен $tE - F_{\boldsymbol{v}}$ точно также, как делят «уголком» обычные полиномы с постоянными коэффициентами[3]. В результате получим равенство вида $t^m h_m + \ldots + th_1 + h_0 = (tE - F_{\boldsymbol{v}}) \cdot (t^{m-1} g_{m-1} + \ldots + tg_1 + g_0) + r$, где $g_i, r \in \Bbbk^n$.

Упражнение 9.4. Убедитесь в этом.

Иными словами, вычитая из столбца $h \in \Bbbk[t]^n$ подходящую $\Bbbk[t]$-линейную комбинацию столбцов матрицы $tE - F_{\boldsymbol{v}}$, можно получить вектор $r \in \Bbbk^n$, т. е. $\Bbbk$-линейную комбинацию $r = \sum \lambda_i e_i$ стандартных базисных векторов e_i модуля $\Bbbk[t]^n$. Так как столбцы матрицы $tE - F_{\boldsymbol{v}}$ лежат в ядре гомоморфизма $\pi_{\boldsymbol{v}}$, а векторы $v_i \in V$ линейно независимы над $\Bbbk$, вектор $\pi_{\boldsymbol{v}}(h) = \pi_{\boldsymbol{v}}(r) = \sum \lambda_i v_i$ обращается в нуль если и только если все $\lambda_i = 0$. Следовательно, $r = 0$ и столбец h лежит в $\Bbbk[t]$-линейной оболочке столбцов матрицы $tE - F_{\boldsymbol{v}}$. □

Следствие 9.4

Множество $\mathcal{E}\ell(F)$ является дизъюнктным объединением степеней p^m неприводимых приведённых многочленов из разложений инвариантных множителей $f_i(t)$ матрицы $tE - F_{\boldsymbol{v}}$. Последние равны диагональным элементам $d_{ii}(t)$ нормальной формы Смита[4] матрицы $tE - F_{\boldsymbol{v}}$ и могут быть вычислены по формулам[5] $f_i(t) = \Delta_i(tE - F_{\boldsymbol{v}}) / \Delta_{i-1}(tE - F_{\boldsymbol{v}})$, где $\Delta_i(tE - F_{\boldsymbol{v}})$ означает нод всех $k \times k$ миноров матрицы $tE - F_{\boldsymbol{v}}$. □

[1] См. n° 5.3.3 на стр. 102.

[2] См. n° 6.2 на стр. 114.

[3] См. n° 2.2 на стр. 40.

[4] См. n° 6.1.1 на стр. 106.

[5] См. прим. 8.3 на стр. 136.

9.1.3. Характеристический многочлен. Пусть оператор $F : V \to V$ имеет в некотором базисе $\boldsymbol{v}$ пространства V матрицу F_v, т. е. $F(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}\, F_v$. Тогда в другом базисе $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}\, C$ оператор F имеет сопряжённую матрицу $F_w = C^{-1} F_v C$, так как

$$F(\boldsymbol{w}) = F(\boldsymbol{v}\, C) = F(\boldsymbol{v})\, C = \boldsymbol{v}\, F_v C = \boldsymbol{w}\, C^{-1} F_v C\,.$$

Характеристические многочлены $\det(tE - F_v)$ и $\det(tE - F_w)$ равны, поскольку характеристический многочлен матрицы не меняется при её сопряжении:

$$\det(tE - C^{-1}AC) = \det(tC^{-1}EC - C^{-1}AC) = \det\big(C^{-1}(tE - A)C\big) = \\ = \det C^{-1} \cdot \det(tE - A) \cdot \det C = \det(tE - A)\,.$$

Не зависящий от выбора базиса $\boldsymbol{v}$ в V многочлен $\chi_F(t) \overset{\text{def}}{=} \det(tE - F_v)$ называется *характеристическим многочленом* линейного оператора F. Проделанное выше вычисление также показывает, что характеристические многочлены подобных операторов равны.

Предложение 9.1

Если пространство с оператором (F, V) распадается в прямую сумму пространств с операторами (G, U) и (H, W), то $\chi_F(t) = \chi_G(t) \cdot \chi_H(t)$ в $\Bbbk[t]$.

Доказательство. В базисе пространства $V = U \oplus W$, который получен объединением базисов подпространств U и W, матрица $tE - F$ имеет блочно диагональный вид:

$$tE - F = \begin{pmatrix} tE - G & 0 \\ 0 & tE - H \end{pmatrix}.$$

Раскладывая её определитель по первым $\dim U$ столбцам[1], заключаем, что

$$\det(tE - F) = \det(tE - G)\det(tE - H)\,.$$ □

Упражнение 9.5. Убедитесь, что для любого приведённого многочлена $f \in \Bbbk[t]$ характеристический многочлен оператора умножения на класс $[t]$ в фактор кольце $\Bbbk[t]/(f)$ равен f.

Из предл. 9.1, упр. 9.5 и теор. 9.1 на стр. 144 мы получаем

Предложение 9.2

Характеристический многочлен равен произведению всех элементарных делителей. □

Упражнение 9.6. Выведите из предл. 9.2 новое доказательство теоремы Гамильтона – Кэли.

9.1.4. Минимальный многочлен. Для каждого неприводимого приведённого многочлена $p \in \Bbbk[t]$ обозначим через $m_p(F)$ максимальный показатель m, с которым p^m присутствует в наборе $\mathcal{E\ell}(F)$ элементарных делителей оператора F, а для тех неприводимых приведённых многочленов $p \in \Bbbk[x]$, степени которых не представлены в $\mathcal{E\ell}\, F$, положим $m_p(F) = 0$. Таким образом, $m_p(F) = 0$ для всех неприводимых приведённых $p \in \Bbbk[x]$ кроме конечного числа. Из теор. 9.1 вытекает, что приведённый многочлен $\mu_F(t)$ наименьшей возможной степени, аннулирующий оператор F, равен

$$\mu_F(t) = \prod_p p^{m_p(F)}\,, \tag{9-2}$$

[1] См. формулу (8-16) на стр. 137.

где произведение берётся по всем приведённым неприводимым $p \in \Bbbk[t]$. Многочлен $\mu_F(t)$ называется *минимальным многочленом* оператора $F : V \to V$. Он порождает ядро гомоморфизма вычисления многочленов на операторе F

$$\mathrm{ev}_F : \Bbbk[t] \to \mathrm{End}_{\Bbbk}(V), \quad f(t) \mapsto f(F),$$

и делит в $\Bbbk[t]$ все аннулирующие оператор F многочлены, включая характеристический многочлен $\chi_F(t) = \det(tE - F)$. Как мы видели в n° 6.2 на стр. 114, произведение (9-2) равно наибольшему инвариантному множителю матрицы $tE - F$, который по сл. 9.4 на стр. 145 равен отношению $\det(tE - F)$ к нод всех миноров порядка $\dim V - 1$ матрицы $tE - F$. Мы заключаем, что для ненулевого линейного оператора F, действующего на n-мерном векторном пространстве отношение χ_F/μ_F равно нод всех миноров порядка $n - 1$ матрицы $tE - F$. Это даёт явную формулу для μ_F, однако практическое вычисление μ_F по этой формуле довольно трудоёмко, и минимальный многочлен обычно вычисляют так, как в примере ниже.

Пример 9.1 (отыскание минимального многочлена)
Для каждого вектора $v \in V$ и линейного оператора $F : V \to V$ существует такой приведённый многочлен наименьшей степени от оператора F, который аннулирует вектор v. Чтобы написать его явно, надо найти наименьшее такое $k \in \mathbb{N}$, что вектор $F^k v$ линейно выражается через векторы $v, Fv, \dots, F^{k-1}v$. Если это выражение имеет вид $F^k v = \mu_1 F^{k-1}v + \dots + \mu_{k-1}Fv + \mu_k v$, то искомый многочлен $\mu_{v,F}(t) = t^k - \mu_1 t^{k-1} - \dots - \mu_{k-1}t - \mu_k$.

Упражнение 9.7. Убедитесь, что любой аннулирующий оператор F многочлен делится на все многочлены $\mu_{v,F}$, где $v \in V$.

Таким образом, минимальный многочлен μ_F оператора F представляет собою наименьшее общее кратное многочленов $\mu_{v,F}$ по всем $v \in V$. Очевидно, что для отыскания этого наименьшего общего кратного достаточно ограничиться только векторами v из некоторого базиса $e_1, \dots, e_n$ пространства V.

Упражнение 9.8. Убедитесь в этом.

Вычислим, к примеру, минимальный многочлен оператора $F : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$, заданного в стандартном базисе $e_1, \dots, e_4$ матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 & 3 \\ 4 & 6 & -4 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Векторы[1]

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Fe_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad F^2 e_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

[1]Векторы Fe_1 и $F^2 e_1$ суть первые столбцы матриц A и A^2.

линейно независимы. Чтобы выяснить, выражается ли через них вектор[1]

$$F^3e_1 = \begin{pmatrix} -8 \\ 16 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix},$$

необходимо решить неоднородную систему с расширенной матрицей

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 0 & 4 & 0 & 16 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \end{array}\right).$$

Методом Гаусса преобразуем эту матрицу к приведённому ступенчатому виду

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

и получаем решение $(-4, 4, 1)$, т. е. $F^3e_1 = -4e_1 + 4Fe_1 + F^2e_1$. Таким образом, минимальный многочлен от оператора F, аннулирующий вектор e_1, равен $F^3 - F^2 - 4F + 4E$. Вычисляя

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & -3 \\ -3 & -3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A^3 = \begin{pmatrix} -8 & -9 & 9 & 9 \\ 16 & 24 & -16 & -16 \\ 7 & 14 & -6 & -7 \\ 9 & 9 & -9 & -8 \end{pmatrix},$$

убеждаемся, что $A^3 - A^2 - 4A + 4E = 0$. Тем самым, $\mu_F = t^3 - t^2 - 4t + 4$.

9.1.5. Линейные операторы над алгебраически замкнутым полем. Если основное поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, то неприводимые приведённые многочлены в $\Bbbk[t]$ исчерпываются линейными двучленами $(t-\lambda)$, где $\lambda \in \Bbbk$. Оператор умножения на класс $[t] = [\lambda] + [t-\lambda]$ в фактор кольце $\Bbbk[t]/\big((t-\lambda)^m\big)$ является суммой скалярного оператора $\lambda\,\mathrm{Id} : [g] \mapsto \lambda[g]$, умножающего все векторы на λ, и оператора умножения на класс $(t-\lambda)$, который действует на состоящий из векторов $e_i = \big[(t-\lambda)^{m-i}\big]$, $1 \leqslant i \leqslant m$, базис пространства $\Bbbk[t]/\big((t-\lambda)^m\big)$ по правилу

$$0 \mapsfrom e_1 \mapsfrom e_2 \mapsfrom e_3 \mapsfrom \dots \mapsfrom e_{m-1} \mapsfrom e_m. \tag{9-3}$$

Таким образом, умножение на класс $[t]$ задаётся в базисе $e_1, \dots, e_n$ матрицей

$$J_m(\lambda) \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \tag{9-4}$$

которая называется *жордановой клеткой* размера m с *собственным числом* λ. По теор. 9.1 каждый линейный оператор F над алгебраически замкнутым полем подобен оператору умножения

[1]Это первый столбец матрицы A^3.

на класс $[t]$ в прямой сумме фактор колец вида $\Bbbk[t]/\big((t-\lambda)^m\big)$, и два таких оператора подобны если и только если прямые суммы отличаются друг от друга перестановкой слагаемых. На языке матриц сказанное означает, что любая квадратная матрица A над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ сопряжена блочно диагональной матрице, по главной диагонали которой располагаются жордановы клетки (9-4), причём эта блочно диагональная матрица однозначно с точностью до перестановки клеток определяется матрицей A. Она называется *жордановой нормальной формой* матрицы A. Две матрицы сопряжены если и только если у них одинаковые с точностью до перестановки клеток жордановы нормальные формы.

Числа λ, встречающиеся в клетках жордановой нормальной формы матрицы A суть корни характеристического многочлена $\chi_A(t) = \det(tE - A)$ задаваемого этой матрицей оператора F, и кратность каждого корня λ равна сумме размеров всех жордановых клеток с собственным числом λ. Минимальный многочлен $\mu_A = \prod_{\lambda \in \operatorname{Spec} A}(t-\lambda)^{m_\lambda}$ равен взятому по всем корням λ характеристического многочлена матрицы A произведению одночленов $(t-\lambda)$ в степенях, равных максимальным размерам жордановых клеток с собственным числом λ. Кратность корня $\lambda \in \operatorname{Spec} F$ в минимальном многочлене $\mu_F(t)$ равна максимальному такому m, что $(t-\lambda)^m \in \mathcal{E}\ell(F)$, а кратность корня $\lambda \in \operatorname{Spec} F$ в характеристическом многочлене $\chi_F(t)$ равна сумме всех таких m, что $(t-\lambda)^m \in \mathcal{E}\ell(F)$. В частности, характеристический и минимальный многочлены имеют одинаковый набор корней. Он обозначается $\operatorname{Spec} F$ и называется *спектром* оператора F, а сами корни $\lambda \in \operatorname{Spec} F$ называются *собственными числами* или *собственными значениями* оператора F.

Упражнение 9.9. Как действует умножение на класс $[t]$ в фактор кольце $\Bbbk[t]/(t-\lambda)$ и в прямой сумме конечного множества таких фактор колец?

9.1.6. Нормальные формы матриц над незамкнутыми полями. Аналогом жордановой клетки (9-4) над произвольным полем $\Bbbk$ является матрица умножения на класс $[t]$ в фактор кольце $\Bbbk[t]/(p^m)$, где $p = t^d + a_1t^{d-1} + \ldots + a_d \in \Bbbk[t]$ — произвольный неприводимый приведённый многочлен, записанная в базисе

$$p^{m-1}t^{d-1}, \ldots, p^{m-1}t, p^{m-1},\ p^{m-2}t^{d-1}, \ldots, p^{m-2}t, p^{m-2},\ \ldots, \ldots, \ldots,\ t^{d-1}, \ldots, t, 1\,, \qquad (9\text{-}5)$$

который состоит из d последовательных фрагментов вида $p^kt^{m-1}, \ldots, p^kt, p^k$ длины d, получающихся из самого правого фрагмента $t^{d-1}, \ldots, t, 1$ умножением на p^k, где $k = 0, 1, \ldots, m-1$.

Упражнение 9.10. Убедитесь, что классы многочленов (9-5) действительно образуют базис в $\Bbbk[t]/(p^m)$.

Так как умножение на t переводит класс p^kt^ℓ в классы многочленов

$$\begin{aligned} p^kt^{\ell+1},&\ \text{при } 0 \leqslant \ell \leqslant d-2,\\ p^{k+1} - a_1p^kt^{d-1} + \ldots + a_dp^k,&\ \text{при } \ell = d-1,\ k \leqslant m-2,\\ -a_1p^{m-1}t^{d-1} + \ldots + a_dp^{m-1},&\ \text{при } \ell = d-1,\ k = m-1, \end{aligned}$$

эта матрица имеет вид, указанный в форм. (9-4) на стр. 148 ниже, где главная диагональ и $d-1$ диагоналей под нею представляют собою заканчивающиеся $d-i$ нулями последовательности

$$-a_i, 0, \ldots, 0, -a_i, 0, \ldots, 0, -a_i, 0, \ldots\ ,$$

в которых между каждыми двумя буквами $-a_i$ располагается $d-1$ нулей, а $i=1,\dots,d$, диагональ над главной заполнена единицами, а на остальных местах стоят нули:

$$J_m(p) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix}
-a_1 & 1 &&&&&&&&&&& \\
-a_2 & 0 & 1 &&&&&&&&&& \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots &&&&&&&&& \\
-a_d & 0 & \dots & 0 & 1 &&&&&&&& \\
& 0 & \dots & 0 & -a_1 & 1 &&&&&&& \\
&& \ddots & 0 & -a_2 & 0 & 1 &&&&&& \\
&&& \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots &&&&& \\
&&&& -a_d & 0 & \dots & 0 & 1 &&&& \\
&&&&& \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots &&& \\
&&&&&& \ddots & \ddots & \ddots & -a_1 & 1 && \\
&&&&&&& \ddots & 0 & \ddots & 0 & \ddots & \\
&&&&&&&& 0 & -a_{d-1} & \ddots & \ddots & 1 \\
&&&&&&&&& -a_d & 0 & \dots\dots & 0
\end{pmatrix}. \tag{9-6}$$

Упражнение 9.11. Убедитесь, что при $d=1$ и $p=t-\lambda$ матрица (9-6) превращается в жорданову клетку (9-4).

Из теор. 9.1 на стр. 144 вытекает, что каждая матрица над произвольным полем $\Bbbk$ подобна блочно диагональной матрице, состоящей из обобщённых жордановых клеток (9-6), и две такие матрицы подобны если и только если они получаются друг из друга перестановкой клеток.

Как мы видели в n° 6.3 на стр. 117 набор элементарных делителей $\mathcal{E}\ell(F)$ получается из единственного набора инвариантных множителей $f_1,\dots,f_r \in \Bbbk[x]$, в котором $f_i \mid f_j$ при $i<j$, и по китайской теореме об остатках

$$\bigoplus\nolimits_{p^m\in\mathcal{E}\ell(F)} \Bbbk[t]/(p^m) \simeq \Bbbk[t]/(f_1)\oplus\dots\oplus\Bbbk[t]/(f_r)\,.$$

Так как матрица умножения на t в фактор кольце $k[x]/(f)$, где

$$f = t^m + a_1t^{m-1}+\dots+a_m\,,$$

имеет в базисе из классов многочленов $t^{m-1},\dots,t,1$ вид

$$F(f) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix}
-a_1 & 1 &&& \\
-a_2 & 0 & 1 && \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\
-a_{d-1} & 0 & \dots & 0 & 1 \\
-a_d & 0 & \dots & 0 & 0
\end{pmatrix}, \tag{9-7}$$

мы заключаем, что каждая матрица над произвольным полем $\Bbbk$ подобна единственной блочно диагональной матрице, составленной из блоков $F(f_1),\dots,F(f_r)$ вида (9-7), где $f_i \mid f_j$ при $i<j$. Такая блочно диагональная матрица называется *фробениусовой нормальной формой*. Обратите внимание, что последний многочлен f_r в нормальной форме Фробениуса равен минимальному многочлену μ_F оператора F.

Например, умножение на t в вещественном векторном пространстве

$$V = \mathbb{R}[t]/\big((t^2+1)^2\big)\oplus\mathbb{R}[t]/\big((t+1)^2\big)\oplus\mathbb{R}[t]/(t+1)$$

имеет (вещественную) нормальную форму Жордана из трёх клеток размеров 4, 2, 1:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

а его нормальна форма Фробениуса получается из разложения $V = \mathbb{R}[t]/(f_1) \oplus \mathbb{R}[t]/(f_2)$, где $f_1 = t+1$, $f_2 = (t^2+1)^2(t+1)^2 = t^6 + 2t^5 + 3t^4 + 4t^3 + 3t^2 + 2t + 1$ и содержит две клетки:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{9-8}$$

Умножение на t в аналогичном комплексном векторном пространстве

$$W = \mathbb{C}[t]/\big((t^2+1)^2\big) \oplus \mathbb{C}[t]/\big((t+1)^2\big) \oplus \mathbb{C}[t]/(t+1) \simeq \\ \simeq \mathbb{C}[t]/\big((t-i)^2\big) \oplus \mathbb{C}[t]/\big((t+i)^2\big) \oplus \mathbb{C}[t]/\big((t+1)^2\big) \oplus \mathbb{C}[t]/(t+1)$$

имеет (комплексную) жорданову нормальную форму из 4-х клеток размеров 2, 2, 2, 1:

$$\begin{pmatrix} -i & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

а его фробениусова нормальная форма совпадает с (9-8).

9.2. Специальные классы операторов. В этом разделе мы подробно остановимся на свойствах нескольких специальных классов операторов, играющих важную роль в различных задачах из разных областей математики.

9.2.1. Нильпотентные операторы. Линейный оператор $F : V \to V$ называется *нильпотентным*, если $F^m = 0$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Так как нильпотентный оператор аннулируется многочленом t^m, все его элементарные делители являются степенями t. В частности минимальный многочлен тоже является степенью t, и поскольку минимальный многочлен делит характеристический многочлен, степень которого равна $\dim V$, в определении нильпотентного оператора можно без ограничения общности считать, что $m \leqslant \dim V$. По теор. 9.1 нильпотентный оператор изоморфен оператору умножения на класс $[t]$ в прямой сумме фактор колец вида

$$\Bbbk[t]/(t^{\nu_1}) \oplus \ldots \oplus \Bbbk[t]/(t^{\nu_k}), \tag{9-9}$$

и два таких оператора изоморфны друг другу если и только если выписанные в порядке нестрогого убывания наборы показателей $\nu_1 \geqslant \nu_2 \geqslant \ldots \geqslant \nu_k$ у них одинаковы. Таким образом, нильпотентные операторы над произвольным полем $\Bbbk$ взаимно однозначно соответствуют диаграммам Юнга ν. Диаграмма $\nu(F)$, характеризующая нильпотентный оператор F, называется его *цикловым типом*.

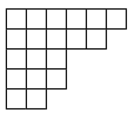
Умножение на t действует на состоящий из векторов $e_i = [t^{m-i}]$ базис в $\Bbbk[t]/(t^m)$ так[1]:

$$0 \hookleftarrow e_1 \hookleftarrow e_2 \hookleftarrow e_3 \hookleftarrow \ \ldots \ \hookleftarrow e_{m-1} \hookleftarrow e_m$$

и имеет в этом базисе матрицу

$$J_m(0) \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

которая называется *нильпотентной жордановой клеткой* размера m. Тем самым, для нильпотентного оператора F циклового типа $\nu(F)$ в пространстве V имеется базис, векторы которого размещаются по клеткам диаграммы $\nu(F)$ так, что F переводит каждый из них в левый соседний, а все векторы самого левого столбца — в нуль:



$$\leftrightsquigarrow \quad \begin{array}{l} 0 \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \\ 0 \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \\ 0 \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \\ 0 \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \\ 0 \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \end{array} \tag{9-10}$$

Базис такого вида называется *циклическим* или *жордановым* базисом нильпотентного оператора F, а наборы базисных векторов, стоящие по строкам диаграммы, называются *жордановыми цепочками*. Так как сумма длин первых m столбцов диаграммы $\nu(F)$ равна $\dim\ker F^m$, длина m-того столбца диаграммы $\nu(F)$ равна $\dim\ker F^m - \dim\ker F^{m-1}$.

Упражнение 9.12. В условиях n° 9.1.5 на стр. 148 покажите, что для отыскания жордановой нормальной формы оператора F над алгебраически замкнутым полем достаточно разложить характеристический многочлен $\chi_F(t)$ на линейные множители:

$$\chi_F(t) = \prod\nolimits_{\lambda \in \operatorname{Spec} F} (t - \lambda)^{m_\lambda}$$

и для каждого $\lambda \in \operatorname{Spec} F$ и натурального k в пределах $1 \leqslant k \leqslant m_\lambda$, где m_λ — кратность корня λ, вычислить[2] $\dim\ker(\lambda\,\mathrm{Id} - F)^k$, после чего построить диаграмму Юнга ν, в которой k-й столбец имеет длину $\dim\ker(\lambda\,\mathrm{Id} - F)^k - \dim\ker(\lambda\,\mathrm{Id} - F)^{k-1}$. Количество жордановых клеток размера m с заданным собственным значением λ в жордановой нормальной форме оператора F равно количеству строк длины m в диаграмме Юнга ν.

---

[1] См. формулу (9-3) на стр. 148.

[2] Причём это вычисление достаточно продолжать только до тех пор, пока $\dim\ker(\lambda\,\mathrm{Id} - F)^k$ строго увеличивается с ростом k. Если при очередном k размерность останется такой же, как при предыдущем k, то она будет оставаться такой и для всех последующих k.

9.2.2. Полупростые операторы. Прямая сумма простых[1] пространств с операторами называется *полупростым* или *вполне приводимым* пространством с оператором.

Предложение 9.3
Следующие свойства оператора $F : V \to V$ эквивалентны друг другу:

1) V является прямой суммой неприводимых F-инвариантных подпространств

2) V линейно порождается неприводимыми F-инвариантными подпространствами

3) для каждого ненулевого F-инвариантного подпространства $U \subsetneq V$ существует такое F-инвариантное подпространство $W \subset V$, что $V = U \oplus W$

4) оператор F подобен умножению на класс $[t]$ в прямой сумме фактор колец

$$\Bbbk[t]/(p_1) \oplus \Bbbk[t]/(p_2) \oplus \ldots \oplus \Bbbk[t]/(p_r)\,,$$

где $p_i \in \Bbbk[t]$ приведены и неприводимы[2] (но не обязательно различны).

Доказательство. Импликация (1) ⇒ (2) очевидна. Импликация (2) ⇒ (3) вытекает из лем. 7.1 на стр. 128. Для лучшего понимания происходящего повторим её доказательство в нашем нынешнем контексте. Для каждого неприводимого F-инвариантного подпространства $L \subset V$ пересечение $L \cap U$, будучи F-инвариантным подпространством в L, либо нулевое, либо совпадает с L. Если все неприводимые инвариантные подпространства $L \subset V$ лежат в U, то $U = V$ в силу (2), и доказывать нечего. Если есть ненулевое неприводимое F-инвариантное подпространство $L_1 \subset V$ с $L_1 \cap U = 0$, заменим U на $U \oplus L_1$ и повторим рассуждение. Поскольку размерность подпространства U на каждом таком шагу строго увеличивается, через конечное число шагов получится равенство $U \oplus L_1 \oplus \ldots \oplus L_k = V$, и можно взять $W = L_1 \oplus \ldots \oplus L_k$.

Чтобы доказать импликацию (3) ⇒ (4), покажем сначала, что если свойство (3) выполнено для пространства V, то оно выполнено и для каждого F-инвариантного подпространства $H \subset V$. Рассмотрим любое инвариантное подпространство $U \subset H$ и отыщем в V такие инвариантные подпространства Q и R, что $V = H \oplus Q = U \oplus Q \oplus R$. Рассмотрим проекцию $\pi : V \twoheadrightarrow H$ с ядром Q и положим $W = \pi(R)$.

Упражнение 9.13. Проверьте, что $H = U \oplus W$.

Итак, если свойство (3) выполнено для прямой суммы фактор колец (9-1) из теор. 9.1, то оно выполнено и для каждого слагаемого этой суммы. Однако по сл. 9.2 пространство $\Bbbk[t]\,/\,(p^m)$ при $m > 1$ приводимо, но неразложимо.

Импликация (4) ⇒ (1) также немедленно вытекает из сл. 9.2. □

Следствие 9.5 (из доказательства предл. 9.3)
Ограничение полупростого оператора на инвариантное подпространство также является полупростым оператором.

---

[1] В другой терминологии — неприводимых, см. начало n° 9.1 на стр. 143.

[2] Иными словами, в прямой сумме (9-1) из теор. 9.1 все показатели степеней $m_i = 1$.

9.2.3. Циклические векторы. Вектор $v \in V$ называется *циклическим вектором* линейного оператора $F : V \to V$, если его F-орбита $v, Fv, F^2v, F^3v, , \dots$ линейно порождает пространство V над полем $\Bbbk$. Иначе можно сказать, что вектор v порождает модуль V_F над $\Bbbk[t]$.

Предложение 9.4
Следующие свойства оператора $F : V \to V$ эквивалентны друг другу:

1) F обладает циклическим вектором
2) F подобен умножению на класс $[t]$ в фактор кольце $\Bbbk[t]/(f)$, где $f \in \Bbbk[t]$ — какой-либо приведённый многочлен
3) каждый неприводимый $p \in \Bbbk[t]$ встречается в $\mathcal{E}\ell\, F$ не более одного раза
4) минимальный многочлен оператора F совпадает с характеристическим.

Доказательство. Условия (3) и (4) эквивалентны в силу предл. 9.2 и означают, что оператор F подобен умножению на t в прямой сумме фактор колец $\Bbbk[t]/(p_1^{m_1}) \oplus \ldots \oplus \Bbbk[t]/(p_r^{m_r})$, где все неприводимые приведённые многочлены $p_1, \dots, p_r$ попарно различны. По китайской теореме об остатках, эта сумма изоморфна $\Bbbk[t]/(f)$, где $f = \chi_F = \mu_F = \prod_i p_i^{m_i}$. Тем самым, (2) равносильно (3) и (4). Импликация (2) $\Rightarrow$ (1) очевидна: в качестве циклического вектора для оператора умножения на t в фактор кольце $\Bbbk[t]/(f)$ можно взять $v = [1]$. Наоборот, если модуль V_F порождается над $\Bbbk[t]$ одним вектором v, то $V_F = \Bbbk[t]/R$, где $R = \ker \pi$ — ядро $\Bbbk[t]$-линейного эпиморфизма $\Bbbk[t] \twoheadrightarrow V_F$, преводящего 1 в v. Поскольку $\Bbbk[t]$ — кольцо главных идеалов, модмодуль $R \subset \Bbbk[t]$ имеет вид (f), где f-приведённый многочлен наименьшей степени со свойством $f(F)v = 0$. Тем самым, $V = \Bbbk[t]/(f)$. □

9.2.4. Собственные подпространства и собственные числа. Максимальное по включению ненулевое подпространство в V, на котором оператор $F : V \to V$ действует как умножение на скаляр $\lambda \in \Bbbk$, называется *собственным подпространством* оператора F с *собственным числом* или *собственным значением* λ и обозначается $V_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid F(v) = \lambda v\} = \ker(\lambda \operatorname{Id}_V - F)$. Ненулевые векторы $v \in V_\lambda$ называются *собственными векторами* оператора F с собственным числом[1] λ.

Предложение 9.5
Любой набор собственных векторов с попарно различными собственными числами линейно независим.

Доказательство. Пусть собственные векторы $v_1, \dots, v_m$ имеют попарно разные собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ и линейно зависимы. Рассмотрим линейное соотношение между ними, в котором задействовано минимально возможное число векторов. Пусть это будут векторы $e_1, \dots, e_k$. Тогда $k \geqslant 2$ и $e_k = x_1e_1 + \ldots + x_{k-1}e_{k-1}$, где все $x_i \in \Bbbk$ отличны от нуля. При этом $\lambda_k e_k = F(e_k) = \sum x_i F(e_i) = \sum x_i \lambda_i e_i$. Вычитая из этого равенства предыдущее, умноженное на λ_k, получаем более короткую зависимость $x_1(\lambda_1 - \lambda_k)e_1 + \ldots + x_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)e_{k-1} = 0$ с ненулевыми коэффициентами. □

Следствие 9.6
Сумма ненулевых собственных подпространств с попарно разными собственными числами является прямой. □

[1]Или собственным значением.

9.2.5. Спектр. Множество собственных чисел линейного оператора $F : V \to V$, т. е. всех таких $\lambda \in \Bbbk$, что $V_\lambda = \ker(\lambda \operatorname{Id}_V - F) \neq 0$, называется *спектром*[1] оператора F в поле $\Bbbk$ и обозначается $\operatorname{Spec} F = \{\lambda \in \Bbbk \mid \ker(\lambda \operatorname{Id}_V - F) \neq 0\} = \{\lambda \in \Bbbk \mid \det(tE - F) = 0\}$. Так как $\ker(\lambda \operatorname{Id}_V - F) \neq 0$ если и только если $\det(tE - F) = 0$, спектр совпадает с множеством корней характеристического многочлена $\chi_F(t) = \det(tE - F)$ в поле $\Bbbk$. В частности, количество различных собственных чисел не превосходит $\deg \chi_F = \dim V$, что также вытекает из сл. 9.6, согласно которому

$$\sum_{\lambda \in \operatorname{Spec} F} \dim V_\lambda \leqslant \dim V \, . \tag{9-11}$$

Упражнение 9.14. Покажите, что $\operatorname{Spec} F$ содержится в множестве корней любого многочлена, аннулирующего F.

Если известен спектр F, отыскание собственных подпространств сводится к решению систем линейных однородных уравнений $(\lambda \operatorname{Id}_V - F)\, v = 0$, которые гарантированно имеют ненулевые решения при $\lambda \in \operatorname{Spec} F$. Если основное поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, спектр любого оператора гарантированно не пуст, поскольку характеристический многочлен $\chi_F(t)$ обязательно имеет корень в поле $\Bbbk$.

Предложение 9.6
Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ любой оператор обладает хотя бы одним ненулевым собственным подпространством. □

Упражнение 9.15. Покажите, что над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ оператор F нильпотентен если и только если $\operatorname{Spec} F = \{0\}$, и приведите пример оператора, для которого неравенство (9-11) строгое.

9.2.6. Диагонализуемые операторы. Оператор $F : V \to V$ называется *диагонализуемым*, если в V имеется базис, в котором F записывается диагональной матрицей. Такой базис состоит из собственных векторов оператора F, а элементы диагональной матрицы суть собственные числа F, причём каждое собственное число $\lambda \in \operatorname{Spec} F$ встречается на диагонали ровно столько раз, какова кратность корня $t = \lambda$ в характеристическом многочлене $\chi_F(t)$ и какова размерность собственного подпространства V_λ. Иначе можно сказать, что диагонализуемый оператор F подобен оператору умножения на класс $[t]$ в прямой сумме фактор колец[2] $\Bbbk[t]/(t - \lambda) \simeq \Bbbk$, где λ пробегает $\operatorname{Spec} F$, и каждое такое прямое слагаемое представлено в сумме ровно $\dim V_\lambda$ раз.

Предложение 9.7
Следующие свойства линейного оператора $F : V \to V$ эквивалентны:

1) F диагонализуем
2) пространство V линейно порождается собственными векторами оператора F
3) характеристический многочлен $\chi_F(t) = \det(tE - F)$ полностью раскладывается в $\Bbbk[t]$ на линейные множители, и кратность каждого его корня λ равна размерности собственного подпространства V_λ
4) все элементарные делители F имеют вид $(t - \lambda)$, $\lambda \in \Bbbk$

[1] Ср. с n° 9.1.5 на стр. 148.
[2] Ср. с упр. 9.9 на стр. 149.

5) оператор F аннулируется многочленом f, раскладывающимся в $\Bbbk[t]$ в произведение попарно различных линейных множителей.

Доказательство. Эквивалентности (2) $\iff$ (1) $\iff$ (4) и импликация (1) $\Rightarrow$ (3) очевидны из предваряющего предл. 9.7 обсуждения. Эквивалентность (4) $\iff$ (5) следует из сл. 9.3. Из (3) вытекает, что $\sum \dim V_\lambda = \deg \chi_F = \dim V$. Поэтому прямая по сл. 9.6 сумма всех различных собственных подпространств V_λ совпадает с V, что даёт импликацию (3) $\Rightarrow$ (1). □

Следствие 9.7
Если оператор $F : V \to V$ диагонализуем, то его ограничение на любое инвариантное подпространство тоже диагонализуемо на этом подпространстве.

Доказательство. Это вытекает из свойства (5) предл. 9.7. □

Упражнение 9.16. Убедитесь, что над алгебраически замкнутым полем диагонализуемость равносильна полупростоте.

9.2.7. Перестановочные операторы. Если линейные операторы $F, G : V \to V$ на векторном пространстве V над произвольным полем $\Bbbk$ коммутируют друг с другом, то ядро и образ любого многочлена от оператора F переводятся оператором G в себя, поскольку

$$\begin{aligned} f(F)\,v = 0 \quad &\Rightarrow \quad f(F)\,G\,v = G\,f(F)\,v = 0 \\ v = f(F)\,w \quad &\Rightarrow \quad Gv = G\,f(F)\,w = f(F)\,Gw\,. \end{aligned}$$

В частности, все собственные подпространства $V_\lambda = \ker(F - \lambda E)$ инвариантны относительно любого перестановочного с F оператора G.

Предложение 9.8
В конечномерном векторном пространстве V над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ любое множество коммутирующих друг с другом операторов обладает общим для всех операторов собственным вектором. Над произвольным полем $\Bbbk$ любое множество коммутирующих друг с другом диагонализуемых операторов на V можно одновременно диагонализовать в одном общем для всех операторов базисе.

Доказательство. Индукция по $\dim V$. Если все операторы скалярны (что так при $\dim V = 1$), то доказывать нечего — подойдут, соответственно, любой ненулевой вектор и любой базис. Если среди операторов есть хоть один нескалярный оператор F, то над замкнутым полем у него есть собственное подпространство строго меньшей размерности, чем V, а в диагонализуемом случае V является прямой суммой таких собственных подпространств. Каждое собственное подпространство оператора F инвариантно для всех операторов, причём если операторы диагонализуемы на всём пространстве, то их ограничения на собственные подпространства оператора F останутся диагонализуемы по сл. 9.7. Применяя к собственным подпространствам оператора F предположение индукции, получаем требуемое. □

Пример 9.2 (конечные группы операторов)
Если m линейных операторов на конечномерном пространстве V над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ характеристики $\operatorname{char} \Bbbk > m$ образуют группу G, то каждый из этих операторов аннулируется многочленом $t^m - 1$, который раскладывается в произведение m попарно различных

линейных множителей[1]. Поэтому каждый оператор в группе G диагонализуем. Все операторы из группы G одновременно диагонализуются в одном общем базисе если и только если группа G абелева.

9.2.8. Аннулирующие многочлены. Если задан многочлен $f \in \Bbbk[x]$, аннулирующий линейный оператор[2] $F : V \to V$, и известно, как f раскладывается в $\Bbbk[t]$ на простые множители, то в силу сл. 9.3 это оставляет лишь конечное число возможностей для набора элементарных делителей $\mathcal{E}\ell(F)$ и часто позволяет явно описать разложение V в прямую сумму F-инвариантных подпространств во внутренних терминах действия F на пространстве V.

Пример 9.3 (инволюции)
Линейный оператор $\sigma : V \to V$ называется *инволюцией*, если он удовлетворяет соотношению $\sigma^2 = \mathrm{Id}_V$, т. е. аннулируется многочленом $t^2 - 1$. Тождественная инволюция $\sigma = \mathrm{Id}_V$ называется *тривиальной*. Так как $t^2 - 1 = (t+1)(t-1) = 0$ является произведением различных линейных множителей, все инволюции диагонализуемы, причём спектр любой инволюции исчерпывается числами ± 1. Пространство V с инволюцией σ распадается в прямую сумму собственных подпространств $V = V_+ \oplus V_-$ с собственными значениями ± 1, и любой вектор $v \in V$ однозначно представим в виде $v = v_+ + v_-$, где $v_+ = (v + Fv)/2 \in V_+ = \ker(\sigma - \mathrm{Id}_V) = \mathrm{im}(\sigma + \mathrm{Id}_V)$ и $v_- = (v - Fv)/2 \in V_- = \ker(\sigma + \mathrm{Id}_V) = \mathrm{im}(\sigma - \mathrm{Id}_V)$.

Теорема 9.2 (теорема о разложении)
Пусть линейный оператор $F : V \to V$ на произвольном[3] векторном пространстве V над произвольным полем $\Bbbk$ аннулируется произведением $q = q_1 \dots q_r$ попарно взаимно простых многочленов $q_i \in \Bbbk[t]$. Положим $Q_j = q/q_j$. Тогда $\ker q_j(F) = \mathrm{im}\, Q_j(F)$ при всех j, эти подпространства F-инвариантны, и V является прямой суммой тех из них, что отличны от нуля.

Доказательство. Так как $q(F) = q_i(F) \circ Q_j(F) = 0$, имеем включение $\mathrm{im}\, Q_i(F) \subset \ker q_i(F)$. Поэтому достаточно показать, что V линейно порождается образами операторов $Q_i(F)$, а сумма ядер $\ker q_i(F)$ прямая[4], т. е. $\ker q_i(F) \cap \sum_{j \neq i} \ker q_j(F) = 0$ для всех i. Первое вытекает из того, что $\ldots(Q_1, \dots, Q_r) = 1$, а значит, существуют такие $h_1, \dots, h_r \in \Bbbk[t]$, что $1 = \sum Q_j(t) h_j(t)$. Подставляя в это равенство $t = F$ и применяя обе части к произвольному вектору $v \in V$, получаем разложение $v = Ev = \sum Q_j(F) h_j(F) v \in \sum \mathrm{im}\, Q_j(F)$. Второе вытекает из взаимной простоты q_i и Q_i, в силу которой существуют такие $g, h \in \Bbbk[t]$, что $1 = g(t) \cdot q_i(t) + h(t) \cdot Q_i(t)$. Подставим сюда $t = F$ и применим обе части полученного равенства $E = g(F)\, q_i(F) + h(F) \circ Q_i(F)$ к произвольному вектору $v \in \ker q_i(F) \cap \sum_{j \neq i} \ker q_j$. Так как $\ker q_j(F) \subset \ker Q_i(F)$ при всех $j \neq i$, получим $v = Ev = g(F)\, q_i(F)\, v + h(F)\, Q_i(F)\, v = 0$, что и требовалось. □

Пример 9.4 (проекторы)
Линейный оператор $\pi : V \to V$ называется *идемпотентом* или *проектором*, если он аннулируется многочленом $t^2 - t = t(t-1)$, т. е. удовлетворяет соотношению $\pi^2 = \pi$. По теор. 9.2

[1] Поскольку производная mt^{m-1} многочлена $t^m - 1$ отлична от нуля и взаимно проста с этим многочленом, она не имеет с ним общих корней. Следовательно, у многочлена нет кратных корней.

[2] В силу тождества Гамильтона – Кэли по крайней мере один такой многочлен, а именно — характеристический многочлен $\chi_F(t) = \det(tE - F)$, всегда можно явно предъявить.

[3] Возможно даже бесконечномерном.

[4] См. предл. 5.2 на стр. 88.

образ любого идемпотента $\pi: V \to V$ совпадает с подпространством его неподвижных векторов: $\operatorname{im}\pi = \ker(\pi - \mathrm{Id}_V) = \{v \mid \pi(v) = v\}$, и всё пространство распадается в прямую сумму $V = \ker\pi \oplus \operatorname{im}\pi$. Тем самым, оператор π проектирует V на $\operatorname{im}\pi$ вдоль $\ker\pi$. Отметим, что оператор $\mathrm{Id}_V - \pi$ тоже является идемпотентом и проектирует V на $\ker\pi$ вдоль $\operatorname{im}\pi$. Таким образом, задание прямого разложения $V = U \oplus W$ равносильно заданию пары идемпотентных эндоморфизмов $\pi_1 = \pi_1^2$ и $\pi_2 = \pi_2^2$ пространства V, связанных соотношениями $\pi_1 + \pi_2 = 1$ и $\pi_1\pi_2 = \pi_2\pi_1 = 0$.

Упражнение 9.17. Выведите из этих соотношений, что $\ker\pi_1 = \operatorname{im}\pi_2$ и $\operatorname{im}\pi_1 = \ker\pi_2$.

Предложение 9.9
Над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ любой оператор обладает одномерным или двумерным инвариантным подпространством.

Доказательство. Пусть $\chi_F = q_1 \dots q_m$, где $q_i \in \mathbb{R}[t]$ — неприводимые приведённые линейные или квадратичные многочлены, не обязательно различные. Применим нулевой оператор

$$0 = q_1(F) \circ q_2(F) \circ \dots \circ q_m(F)$$

к какому-нибудь ненулевому вектору $v \in V$. Тогда при некотором $i \geqslant 0$ мы получим такой ненулевой вектор $w = q_{i+1}(F) \circ \dots \circ q_m(F)\, v$, что $q_i(F)\, w = 0$. Если $q_i(t) = t - \lambda$ линеен, то $F(w) = \lambda w$, и мы имеем 1-мерное F-инвариантное подпространство $\Bbbk \cdot w$. Если $q_i(t) = t^2 - \alpha t - \beta$ квадратичен, то $F(Fw) = \alpha F(w) + \beta w$ лежит в линейной оболочке векторов w и Fw, которая тем самым является F-инвариантным подпространством, и её размерность не превышает 2. $\square$

9.3. Корневое разложение и функции от операторов. Всюду в этом разделе мы предполагаем, что линейный оператор $F: V \to V$ действует на конечномерном векторном пространстве V над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, которое мы обозначим через $\mathbb{K}$, и аннулируется многочленом, который полностью разлагается над $\mathbb{K}$ на линейные множители. Последнее равносильно тому, что минимальный или характеристический многочлен оператора F полностью разлагался на линейные множители, и тому, что $\mathcal{E}\ell(F)$ исчерпывается степенями линейных двучленов $(t-\lambda)^m$ с $\lambda \in \operatorname{Spec} F$ и $m \in \mathbb{N}$. Подмодуль $(t-\lambda)$-кручения в $\mathbb{K}[t]$-модуле V_F называется *корневым подпространством* оператора F, отвечающим собственному числу $\lambda \in \operatorname{Spec} F$, и обозначается

$$K_\lambda = \{v \in V \mid \exists\, m \in \mathbb{N}: (\lambda\,\mathrm{Id} - F)^m v = 0\} = \bigcup\nolimits_{m \geqslant 1} \ker(\lambda\,\mathrm{Id} - F)^m = \ker(\lambda\,\mathrm{Id} - F)^{m_\lambda}, \quad \text{(9-12)}$$

где m_λ — максимальный из показателей степеней элементарных делителей вида $(t-\lambda)^m$ оператора F. Каждое корневое подпространство K_λ отлично от нуля, ибо содержит ненулевое собственное подпространство V_λ оператора F. Разложение $\mathbb{K}[t]$-модуля V_F в прямую сумму $\mathbb{K}[t]$-подмодулей $(t-\lambda)$-кручения из теор. 6.6 на стр. 120 имеет вид $V = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Spec} F} K_\lambda$ и называется *корневым разложением* оператора F.

Следствие 9.8 (теорема о корневом разложении)
Пусть характеристический многочлен $\chi_F(t)$ линейного оператора $F: V \to V$ на конечномерном векторном пространстве V над полем $\mathbb{K}$ полностью разлагается в $\mathbb{K}[t]$ на линейные множители:

$$\chi_F(t) = \prod\nolimits_{\lambda \in \operatorname{Spec} F} (t-\lambda)^{m_\lambda}.$$

Тогда $V = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Spec} F} K_\lambda$, где $K_\lambda = \ker(\lambda\,\mathrm{Id} - F)^{m_\lambda}$ для всех $\lambda \in \operatorname{Spec} F$. $\square$

Упражнение 9.18. Выведите существование корневого разложения из теор. 9.2 и тождества Гамильтона – Кэли без использования теор. 6.6 и теоремы об элементарных делителях.

9.3.1. Функции от операторов. Пусть линейный оператор F аннулируется многочленом

$$\alpha(t) = (t-\lambda_1)^{m_1} \dots (t-\lambda_s)^{m_s}, \tag{9-13}$$

где $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$ и все $m_i \in \mathbb{N}$. В этом случае характеристический и минимальный многочлены оператора F тоже полностью разлагаются на линейные множители в $\mathbb{K}[t]$, и можно взять в качестве $\alpha(t)$ один из них. Мы полагаем $m = \deg \alpha = m_1 + \dots + m_s$. Алгебра $\mathcal{A}$, состоящая из функций $U \to \mathbb{K}$, заданных на каком-нибудь подмножестве $U \subset \mathbb{K}$, содержащем все корни многочлена (9-13), называется *алгебраически вычислимой* на операторе F, если $\mathbb{K}[t] \subset \mathcal{A}$ и для каждого корня λ кратности k многочлена (9-13) все функции $f \in \mathcal{A}$ определены в точке $\lambda \in \mathbb{K}$ вместе с первыми $k-1$ производными $f^{(\nu)} = \frac{d^\nu f}{dt^\nu}$ и допускают разложение вида

$$f(t) = f(\lambda) + \frac{f'(\lambda)}{1!}(t-\lambda) + \dots + \frac{f^{(k-1)}(\lambda)}{(k-1)!}(t-\lambda)^{k-1} + g_\lambda(t)\cdot(t-\lambda)^k, \tag{9-14}$$

где функция $g_\lambda(t)$ тоже лежит в алгебре $\mathcal{A}$.

Например, алгебра $\mathcal{A}$ всех функций, определённых в ε-окрестности каждого собственного числа $\lambda \in \operatorname{Spec} F$ и представимых в ней суммой абсолютно сходящегося степенного ряда от $(t-\lambda)$, алгебраически вычислима на операторе F. Подалгебра в $\mathcal{A}$, состоящая из всех аналитических функций[1] $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$, алгебраически вычислима на всех операторах $F \in \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V)$, характеристические многочлены которых полностью разлагаются на линейные множители в $\mathbb{K}[t]$.

Теорема 9.3

В сделанных выше предположениях каждая алгебраически вычислимая на операторе $F: V \to V$ алгебра функций $\mathcal{A}$ допускает единственный такой гомоморфизм $\mathbb{K}$-алгебр $\mathrm{ev}_F : \mathcal{A} \to \operatorname{End} V$, что $\mathrm{ev}_F(p) = p(F)$ для всех многочленов $p \in \mathbb{K}[t] \subset \mathcal{A}$.

Определение 9.2 (гомоморфизм вычисления)

Гомоморфизм $\mathrm{ev}_F : \mathcal{A} \to \operatorname{End} V$ из теор. 9.3 называется *вычислением* функций $f \in \mathcal{A}$ на операторе F. Линейный оператор $\mathrm{ev}_F(f) : V \to V$, в который переходит функция $f \in \mathcal{A}$ при гомоморфизме вычисления, обозначается $f(F)$ и называется *функцией f от оператора F*.

Замечание 9.1. (как относиться к функциям от операторов) Из теор. 9.3 вытекает, что если характеристический многочлен линейного оператора $F: V \to V$ полностью разлагается на линейные множители в $\mathbb{K}[t]$, то на пространстве V определены такие линейные операторы, как e^F или $\sin F$, а если $F \in \mathrm{GL}(V)$, то и такие задаваемые аналитическими вне нуля функциями операторы, как $\ln F$ или $\sqrt{F}$, причём алгебраические свойства всех этих операторов точно такие же, как у числовых функций e^t, $\sin t$, $\ln t$ и $\sqrt{t}$. В частности, все эти функции от оператора F коммутируют друг с другом и с F, а также удовлетворяют соотношениям вроде $\ln F^2 = 2\ln F$ и $\sqrt{F}\sqrt{F} = F$. Таким образом, функции от операторов можно использовать для отыскания операторов с предписанными свойствами, например, удовлетворяющих заданному алгебраическому или дифференциальному уравнению, в частности, для извлечения корней из невырожденных операторов.

[1] Т. е. функций, задаваемых сходящимися всюду в $\mathbb{K}$ степенными рядами.

Доказательство теор. 9.3. Пусть оператор F аннулируется многочленом $\alpha(t) = \prod_\lambda (t-\lambda)^{m_\lambda}$, где $\lambda = \lambda_1, \dots, \lambda_r$ пробегает все различные корни этого многочлена, и пусть искомый гомоморфизм $\mathrm{ev}_F : \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ существует. По теореме о разложении[1] пространство V является прямой суммой F-инвариантных подпространств $K_\lambda = \ker(F - \lambda \mathrm{Id})^{m_\lambda}$, и согласно формуле (9-14) оператор

$$f(F) = f(\lambda) \cdot E + f'(\lambda) \cdot (F - \lambda E) + \dots + \frac{f^{(m_\lambda - 1)}(\lambda)}{(m_\lambda - 1)!}(F - \lambda E)^{m_\lambda - 1} + g_\lambda(F)(F - \lambda E)^{m_\lambda} \tag{9-15}$$

действует на каждом подпространстве K_λ точно так же, как результат подстановки оператора F в многочлен $j_\lambda^{m_\lambda - 1} f(t) \stackrel{\text{def}}{=} f(\lambda) + f'(\lambda)\cdot(t-\lambda) + \dots + f^{(m_\lambda-1)}(\lambda)\cdot(t-\lambda)^{m_\lambda-1}/(m_\lambda-1)!$, класс которого в фактор кольце $\mathbb{K}[t]/\big((t-\lambda)^{m_\lambda}\big)$ называется $(m_\lambda - 1)$-*струёй* функции $f \in \mathcal{A}$ в точке $\lambda \in \mathbb{K}$. По китайской теореме об остатках существует единственный такой многочлен $p_{f(F)}(t) \in \mathbb{K}[t]$, степени $< \deg \alpha(t)$, что $p_{f(F)}(t) \equiv j_\lambda^{m_\lambda - 1} f(t) \pmod{\alpha(t)}$ сразу для всех корней λ многочлена α. Поскольку операторы $p_{f(F)}(F)$ и $f(F)$ одинаково действуют на каждом подпространстве K_λ, мы имеем равенство $f(F) = p_{f(F)}(F)$. Таким образом гомоморфизм вычисления единствен. Остаётся убедиться, что отображение $f \mapsto p_{f(F)}(F)$ действительно является гомоморфизмом $\mathbb{K}$-алгебр. Проверим сначала, что отображение

$$\begin{gathered} J : \mathcal{A} \to \frac{\mathbb{K}[t]}{\big((t-\lambda_1)^{m_1}\big)} \times \dots \times \frac{\mathbb{K}[t]}{\big((t-\lambda_r)^{m_r}\big)} \simeq \frac{\mathbb{K}[t]}{(\alpha)} \\ f \mapsto \left(j_{\lambda_1}^{m_1 - 1} f, \dots, j_{\lambda_s}^{m_r - 1} f \right), \end{gathered} \tag{9-16}$$

сопоставляющее функции $f \in \mathcal{A}$ набор её струй[2] во всех корнях многочлена α, является гомоморфизмом $\mathbb{K}$-алгебр, т. е. $\mathbb{K}$-линейно и удовлетворяет равенству $J(fg) = J(f)J(g)$. Первое очевидно, второе достаточно установить для каждой струи j_λ^{m-1} отдельно. Используя правило Лейбница: $(fg)^{(k)} = \sum_{\nu=0}^k \binom{k}{\nu} f^{(\nu)} g^{(k-\nu)}$, получаем следующие равенства по модулю $(t-\lambda)^m$:

$$j_\lambda^{m-1}(fg) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t-\lambda)^k}{k!} \sum_{\nu+\mu=k} \frac{k!}{\nu!\mu!} f^{(\nu)}(\lambda) g^{(\mu)}(\lambda) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{\nu+\mu=k} \frac{f^{(\nu)}(\lambda)}{\nu!}(t-\lambda)^\nu \cdot \frac{g^{(\mu)}(\lambda)}{\mu!}(t-\lambda)^\mu \equiv j_\lambda^{m-1}(f) j_\lambda^{m-1}(g)\,.$$

Отображение $f \mapsto p_{f(F)}(F)$ является композицией гомоморфизма (9-16) с гомоморфизмом вычисления многочленов $\mathrm{ev}_F : \mathbb{K}[t] \to \operatorname{End} V$, $p \mapsto p(F)$, который корректно пропускается через фактор $\mathbb{K}[t]/(\alpha)$, так как $\alpha(F) = 0$. □

Определение 9.3 (интерполяционный многочлен)

Многочлен $p_{f(F)}(t) \in \mathbb{K}[t]$, принимающий на операторе F то же самое значение, что и функция $f \in \mathcal{A}$, называется *интерполяционным многочленом* для вычисления $f(F)$. В силу идущей далее лем. 9.2, он однозначно определяется тем, что в каждом корне λ кратности m многочлена α, аннулирующего оператор f, многочлен $p_{f(F)}(t)$ и первые его $m-1$ производные принимают те же значения, что и функция f и её первые $m-1$ производные. Таким образом, если

[1] См. теор. 9.2 на стр. 157.

[2] Мы рассматриваем этот набор как элемент прямого произведения соответствующих колец вычетов, которое по китайской теореме об остатках изоморфно фактор кольцу $\mathbb{K}[t]/(\alpha)$.

$\deg \alpha = n$, то отыскание коэффициентов интерполяционного многочлена $p_{f(F)}$ сводится к решению системы из n линейных уравнений на n неизвестных.

Лемма 9.2 (об интерполяции с кратными узлами[1])
Для любых различных чисел $a_1, \dots, a_n$ из любого поля $\Bbbk$ и произвольно заданного для каждого a_i набора из $m_i + 1$ значений $b_{i0}, b_{i1}, \dots, b_{im_i} \in \Bbbk$ существует единственный такой многочлен $g \in \Bbbk[x]$ степени не выше $m = (m_1 + 1) + \dots + (m_n + 1) - 1$, что при каждом $i = 1, \dots, n$ сам этот многочлен и первые его m_i производных принимают в точке a_i заданные значения $g(a_i) = b_{i0}$, $g'(a_i) = b_{i1}, \dots\ g^{(m_i)}(a_i) = b_{im_i}$, где $g^{(k)}(x) = d^k g(x)/dx^k$ означает k-ю производную многочлена g.

Доказательство. Выпишем каким-нибудь способом $m+1$ пар чисел (i, j) с $1 \leqslant i \leqslant n$, $0 \leqslant j \leqslant m_j$ в одну строчку и рассмотрим отображение $F : \Bbbk[x]_{\leqslant m} \to \Bbbk^{m+1}$, переводящее каждый многочлен g степени $\deg g \leqslant m$ в набор значений[2] $g^{(j)}(a_i)$, записанных в строчку в том же порядке, что и пары (i, j). Отображение F линейно, поскольку оператор дифференцирования

$$d/dx : \Bbbk[x] \to \Bbbk[x], \quad g \mapsto g',$$

и все отображения вычисления $\mathrm{ev}_a : \Bbbk[x] \to \Bbbk$, $g \mapsto g(a)$, где $a \in \Bbbk$, линейны, и композиция линейных отображений тоже линейна. Если $g \in \ker F$, то по предл. 2.6 на стр. 46 каждое число $a_i \in \Bbbk$ является как минимум $(m_i + 1)$-кратным корнем многочлена g, т. е. g делится на

$$\prod_i (x - a_i)^{m_i+1},$$

что невозможно при $g \neq 0$, ибо степень произведения равна $m + 1 > \deg g$. Мы заключаем, что $\ker F = 0$. Поэтому $\dim \operatorname{im} F = \dim \Bbbk[x]_{\leqslant m} = \dim \Bbbk^{m+1}$, и отображение F биективно. □

Предложение 9.10
В условиях теор. 9.3 на стр. 159 для любой функции f из алгебраически вычислимой на операторе F алгебры функций $\mathcal{A}$ спектр оператора $f(F)$ состоит из чисел $f(\lambda)$, где $\lambda \in \operatorname{Spec} F$. Если $f'(\lambda) \neq 0$, то элементарные делители $(t - \lambda)^m \in \mathcal{E}\ell(F)$ биективно соответствуют элементарным делителям $\big(t - f(\lambda)\big)^m \in \mathcal{E}\ell\big(f(F)\big)$. Если $f'(\lambda) = 0$, то каждому элементарному делителю $(t - \lambda)^m$ с $m > 1$ из $\mathcal{E}\ell(F)$ в $\mathcal{E}\ell\big(f(F)\big)$ соответствует объединение нескольких элементарных делителей $\big(t - f(\lambda)\big)$ с (возможно различными) показателями $\ell < m$.

Доказательство. Реализуем F как оператор умножения на класс $[t]$ в прямой сумме фактор колец $V = \mathbb{K}[t]/\big((t-\lambda_1)^{s_1}\big) \oplus \dots \oplus \mathbb{K}[t]/\big((t-\lambda_r)^{s_r}\big)$. Как мы видели в доказательстве теор. 9.3 ограничение оператора $f(F)$ на корневое подпространство K_λ раскладывается в сумму скалярного оператора $f(\lambda)\,E$ и нильпотентного оператора $N = f'(\lambda) \cdot \eta + \frac{1}{2} f''(\lambda) \cdot \eta^2 + \dots$, где $\eta : K_\lambda \to K_\lambda$ обозначает оператор умножения на класс $[t - \lambda]$. На каждом слагаемом $\mathbb{K}[t]/\big((t - \lambda)^k\big)$ оператор η имеет ровно одну жорданову цепочку максимальной длины k. Если $f'(\lambda) \neq 0$, то

$$N^{k-1} = f'(\lambda)^{k-1} \cdot \eta^{k-1} \neq 0.$$

[1] Это утверждение обобщает прим. 2.5 на стр. 44.
[2] Где для единообразия обозначений мы полагаем $g^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} g$.

Поэтому N тоже имеет ровно одну жорданову цепочку длины k. При $f'(\lambda) = 0$ и $m > 1$ равенство $N^m = 0$ наступит при $m < k$. Поэтому цикловой тип ограничения оператора N на каждое слагаемое вида $\mathbb{K}[t]/\big((t-\lambda)^k\big)$ состоит из нескольких цепочек длины $< k$. □

Упражнение 9.19. Покажите, что матрица $J_n^{-1}(\lambda)$, обратная к жордановой клетке размера $n\times n$ с собственным числом λ, подобна матрице $J_n(\lambda^{-1})$.

Пример 9.5 (степенная функция и рекуррентные уравнения, ср. с прим. 3.6 на стр. 59)
Задача отыскания n-того члена a_n числовой последовательности $z : \mathbb{Z} \to \mathbb{K}$, $n \mapsto z_n$, решающей рекуррентное уравнение $z_n = \alpha_1 z_{n-1} + \alpha_2 z_{n-2} + \ldots + \alpha_m z_{n-m}$ с начальным условием $(z_0, \ldots, z_{n-1}) = (a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$, сводится вычислению n-той степени *матрицы сдвига*

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_m \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & \alpha_{m-1} \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \alpha_2 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & \alpha_1 \end{pmatrix}$$

смещающей каждый фрагмент из m последовательных элементов на один шаг вправо:

$$(z_{k+1},\, z_{k+2},\, \ldots\, ,\, z_{k+m}) \cdot S = (z_{k+2},\, z_{k+3},\, \ldots\, ,\, z_{k+m+1})\,,$$

так что член a_n оказывается равным первой координате вектора

$$(a_n,\, a_{n+1},\, \ldots\, ,\, a_{n+m-1}) = (a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}) \cdot S^n\,.$$

Матрица $S^n = p_{S^n}(S)$ является результатом подстановки матрицы S в интерполяционный многочлен $p_{S^n}(t) \in \mathbb{K}[t]$ для вычисления на матрице S *степенной функции* $f(t) = t^n$. Обратите внимание, что $\deg p_{S^n} < m$, и коэффициенты многочлена p_{S^n} находятся решением системы из m линейных уравнений на m неизвестных.

Например, для *уравнения Фиббоначчи* $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ матрица сдвига

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

Интерполяционный многочлен для вычисления степенной функции t^n на этой матрице линеен. Записывая его в виде $p_{S^n}(t) = at + b$ с неопределёнными коэффициентами a и b, получаем

$$S^n = a\,S + b\,E = \begin{pmatrix} b & a \\ a & a+b \end{pmatrix}\,.$$

Таким образом, n-тое *число Фиббоначчи*, решающее уравнение Фиббоначчи с начальным условием $(a_0, a_1) = (0, 1)$, равно первой координате вектора $\big(a_n, a_{n+1}\big) = (0, 1) \cdot S^n = (a, a+b)$. Матрица S аннулируется своим характеристическим многочленом

$$\chi_S(t) = t^2 - t\,\operatorname{tr} S + \det S = t^2 - t - 1 = (t - \lambda_+)(t - \lambda_-)$$

с однократными корнями $\lambda_\pm = (1 \pm \sqrt{5})/2$. Функция t^n принимает на них значения $\lambda_\pm^n$. Коэффициенты a и b находятся из системы

$$\begin{cases} a\,\lambda_+ + b = \lambda_+^n \\ a\,\lambda_- + b = \lambda_-^n\,, \end{cases}$$

и по правилу Крамера первый из них $a = \left(\lambda_+^n - \lambda_-^n\right)/\left(\lambda_+ - \lambda_-\right)$. Тем самым,

$$a_n = a = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n \cdot \sqrt{5}}\,,$$

что согласуется с прим. 3.6 на стр. 59.

Пример 9.6 (квадратный корень из оператора)
Покажем, что если поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто и $\operatorname{char}\Bbbk \neq 2$, то из любого биективного линейного оператора F на конечномерном векторном пространстве V над полем $\Bbbk$ можно извлечь квадратный корень, являющийся многочленом от оператора F. В прим. 3.8 на стр. 63 мы видели, что при всех целых $k \geqslant 0$ биномиальный коэффициент $\binom{2k}{k}$ нацело делится на $(k+1)$, и если $\operatorname{char}\Bbbk \neq 2$, то корректно определён биномиальный степенной ряд[1]

$$\sqrt{1+x} = \sum_{k\geqslant 0}\binom{1/2}{k}x^k = \sum_{k\geqslant 0}\frac{(-1)^{k-1}}{2^k k!}\cdot 3\cdot 5\cdot\,\cdots\,\cdot(2k-3)\cdot x^k = \\ = 1 + \frac{1}{2}\sum_{k\geqslant 1}\frac{(-1)^{k-1}}{4^{k-1}}\binom{2k-2}{k-1}\frac{x^k}{k}\,. \tag{9-17}$$

Упражнение 9.20. Убедитесь в том, что квадрат многочлена, равного сумме первых $n+1$ членов этого ряда, равен $1+x$ в $\Bbbk[x]/(x^{n+1})$.

Если поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, характеристический многочлен $\chi_F(t)$ оператора F разлагается на взаимно простые множители $(t-\lambda)^{m_\lambda}$, где $\lambda \in \operatorname{Spec}(F)$, и пространство V является прямой суммой F-инвариантных корневых подпространств[2] $K_\lambda = \ker(F-\lambda\mathrm{Id})^{m_\lambda}$. Так как F биективен, все числа λ в этом разложении отличны от нуля. Для каждого $\lambda \in \operatorname{Spec}(F)$ обозначим через $p_\lambda(t) \in \Bbbk[t]$ сумму первых m_λ членов формального разложения Тэйлора функции $\sqrt{t}$ в точке λ, которое получается из (9-17) заменой переменных:

$$\sqrt{t} = \sqrt{\lambda + (t-\lambda)} = \sqrt{\lambda}\cdot\left(1+\lambda^{-1/2}(t-\lambda)\right)^{1/2} = \\ = \lambda^{1/2} + \frac{1}{2}(t-\lambda) - \frac{\lambda^{-1/2}}{8}(t-\lambda)^2 + \frac{\lambda^{-1}}{16}(t-\lambda)^3 - \cdots\,.$$

Тогда $p_\lambda^2(t) \equiv t \bmod (t-\lambda)^{m_\lambda}$ в силу упр. 9.20. По китайской теореме об остатках существует многочлен $p(t)$, сравнимый с $p_\lambda(t)$ по модулю $(t-\lambda)^{m_\lambda}$ сразу для всех $\lambda \in \operatorname{Spec}(F)$. Его квадрат $p^2(t) \equiv t \bmod (t-\lambda)^{m_\lambda}$ для всех $\lambda \in \operatorname{Spec}(F)$. Поэтому квадрат оператора $p(F)$ действует на каждом корневом подпространстве K_λ точно также, как F. Тем самым, $p^2(F) = F$.

Замечание 9.2. (аналитически определённые функции от оператора) Существуют чисто аналитические способы продолжения гомоморфизма $\mathrm{ev}_F : \mathbb{C}[z] \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ вычисления значений многочленов на матрице $F \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ с алгебры многочленов на большие алгебры функций $\mathcal{C}$, содержащие алгебру многочленов. А именно, пространства $\mathcal{C}$ и $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ наделяются той или иной топологией, и функция $f \in \mathcal{C}$ представляется в виде предела $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ какой-нибудь последовательности многочленов (f_n), после чего матрица $f(F)$ полагается равной пределу последовательности матриц $f_n(F) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$. Разумеется, при этом необходимо проверять,

[1] См. формулу (3-19) на стр. 63.
[2] См. сл. 9.8 на стр. 158.

что предел $\lim_{n\to\infty} f_n(F) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ существует и зависит только от функции f, а не от выбора сходящейся к f последовательности многочленов (f_n). Отдельно следует убедиться в том, что возникающее таким образом отображение $\mathrm{ev}_F : \mathcal{C} \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$, $f \mapsto f(F)$, является гомоморфизмом алгебр[1]. Однако, если это так, то как бы ни определялась сходимость в пространстве функций и какой бы ни была сходящаяся к функции f последовательность многочленов (f_n), последовательность матриц $f_n(F)$ всегда лежит в конечномерном векторном пространстве, линейно порождённом над $\mathbb{C}$ степенями F^m с $0 \leqslant m < n$, и если переход к пределу в пространстве матриц перестановочен со сложением и умножением на константы[2], то предел последовательности матриц $(f_n(F))$ неминуемо является *многочленом* от F степени, строго меньшей n. Это означает, что какая бы аналитическая процедура не применялась для построения гомоморфизма $\mathrm{ev}_F : \mathcal{C} \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$, значение этого гомоморфизма на заданной функции $f \in \mathcal{C}$ *a priori* вычисляется по указанному в доказательстве теор. 9.3 на стр. 159 рецепту. Отметим также, что если матрицы F и G подобны, т. е. $G = CFC^{-1}$ для некоторой матрицы $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, то и аналитически определённые функции от них подобны: поскольку равенство $f_n(G) = Cf_n(F)C^{-1}$ выполнено для всех многочленов, приближающих функцию f, оно останется выполненным и для предельной функции: $f(G) = Cf(F)C^{-1}$, при условии, что топология на пространстве $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ такова, что все $\mathbb{C}$-линейные отображения $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ непрерывны.

9.4. Разложение Жордана. Этот раздел является уточнением n° 9.1.5 на стр. 148. Всюду далее речь идёт об операторах на конечномерном векторном пространстве V над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$.

Теорема 9.4 (разложение Жордана)
Для каждого оператора F на конечномерном векторном пространстве V над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ существует единственная пара таких операторов F_d и F_n, что F_n нильпотентен, F_d диагонализуем, $F_dF_n = F_nF_d$ и $F = F_d + F_n$. Кроме того, операторы F_d и F_n являются многочленами без свободных членов от оператора F.

Доказательство. Пусть $\operatorname{Spec} F = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$. В силу алгебраической замкнутости поля $\Bbbk$, характеристический многочлен оператора F полностью разлагается на линейные множители: $\chi_F(t) = \prod_{\lambda\in\operatorname{Spec} F}(t-\lambda)^{m_\lambda}$, а пространство V является прямой суммой корневых подпространств: $V = \bigoplus_{\lambda\in\operatorname{Spec} F} K_\lambda$, где $K_\lambda = \ker(F - \lambda\,\mathrm{Id})^{m_\lambda}$. В качестве диагонализуемого оператора F_d можно взять оператор, действующий на каждом корневом подпространстве K_λ умножением на λ, а в качестве нильпотентного оператора F_n взять разность $F_n = F - F_d$, которая действует на каждом корневом подпространстве K_λ нильпотентным оператором $F - \lambda\,\mathrm{Id}$. Покажем, что оба эти оператора являются многочленами без свободного члена от F. Для этого достаточно представить в таком виде оператор F_d. Для каждого ненулевого $\lambda \in \operatorname{Spec} F$ обозначим через $g_\lambda \in \Bbbk[x]$ многочлен, представляющий класс λ / t в $\Bbbk[x] / \big((t-\lambda)^{m_\lambda}\big)$, а для $\lambda = 0$ положим $g_\lambda(t) = 0$. По китайской теореме об остатках существует многочлен $g \in \Bbbk[x]$ сравнимый с g_λ по модулю $(t-\lambda)^{m_\lambda}$ сразу для всех $\lambda \in \operatorname{Spec} F$. Многочлен tg_λ не имеет свободного члена, и его класс

[1] В качестве упражнения по анализу читателю настоятельно рекомендуется попробовать самостоятельно реализовать намеченную программу, используя на пространстве функций топологию, в которой сходимость последовательности функций означает равномерную сходимость в каждом круге в $\mathbb{C}$, а на пространстве $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ — стандартную топологию пространства $\mathbb{C}^{n^2}$, где сходимость определяется покоординатно.

[2] Т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda F_n + \mu G_n) = \lambda \lim\limits_{n\to\infty} F_n + \mu \lim\limits_{n\to\infty} G_n$.

в $\Bbbk[x]\,/\,\big((t-\lambda)^{m_\lambda}\big)$ равен классу λ для всех $\lambda \in \operatorname{Spec} F$. Поэтому оператор $g(F)$ действует на каждом корневом подпространстве K_λ как умножение на λ, т. е. совпадает с F_d. Будучи многочленами от F, операторы F_d и $F_n = F - F_d$ перестановочны между собою и с F. Это доказывает существование операторов F_d и F_n с требуемыми свойствами, включая последнее утверждение предложения. Докажем их единственность. Пусть есть ещё одно разложение $F = F_s' + F_n'$, в котором F_d' диагонализуем, F_n' нильпотентен и $F_d'F_n' = F_n'F_d'$. Из последнего равенства вытекает, что F_d' и F_n' перестановочны с любым многочленом от $F = F_s' + F_n'$, в частности, с построенными выше F_d и F_n. Поэтому каждое собственное подпространство V_λ оператора F_d переводится оператором F_d' в себя[1], причём F_d' диагонализуем[2] на каждом V_λ. Если бы оператор F_d' имел на V_λ собственный вектор с собственным значением $\mu \neq \lambda$, то этот вектор был бы собственным для оператора $F_n - F_n' = F_d - F_d'$ с собственным значением $\lambda - \mu \neq 0$, что невозможно, так как оператор $F_n - F_n'$ нильпотентен.

Упражнение 9.21. Докажите, что разность двух перестановочных нильпотентных операторов нильпотентна.

Следовательно, оператор F_s' действует на каждом собственном подпространстве V_λ оператора F_d как умножение на λ, откуда $F_d' = F_d$. Тогда и $F_n' = F - F_s' = F - F_d = F_n$. □

Определение 9.4
Операторы F_d и F_n из теор. 9.4 называются, соответственно, *диагонализуемой* и *нильпотентной* составляющими оператора F.

Замечание 9.3. Поскольку операторы F_d и F_n являются многочленами от F, каждое F-инвариантное подпространство $U \subset V$ является инвариантным для F_d и F_n.

[1] См. n° 9.2.7 на стр. 156.
[2] См. сл. 9.7 на стр. 156.

Упр. 9.1. Если отождествить $\mathbb{R}[t]/(t^2+1)$ с полем $\mathbb{C}$, отправив классы $[1]$ и $[t]$ в 1 и i соответственно, умножение на класс $[t]$ превратится в умножение на i, т. е. в поворот на угол $\pi/2$, который не переводит никакое одномерное векторное подпространство в себя.

Упр. 9.2. Пусть $\Bbbk[t]/\left(t^n\right) = U \oplus W$, где U и W переводятся в себя умножением на $[t]$. Оба этих подпространства не могут целиком содержаться в образе оператора умножения на $[t]$, так как иначе их сумма тоже бы в нём содержалась. Поэтому в одном из них, пусть это будет U, имеется класс $[g]$ многочлена g с ненулевым свободным членом. Тогда классы $[t^{n-1}g], \dots, [tg], [g] \in U$ выражаются через базис $[1], [t], \dots, [t^{n-1}]$ пространства $\Bbbk[t]/(t^n)$ при помощи верхнетреугольной матрицы, на диагонаи которой всюду стоит ненулевой свободный член многочлена g. Следовательно, эти классы тоже образуют базис в $\Bbbk[t]/(t^n)$, и значит, содержащее их подпространство U совпадает со всем пространством $\Bbbk[t]/(t^n)$.

Упр. 9.3. Разложите каждое пространство $(F|_{U_i}, U_i)$ по форм. (9-1) на стр. 144. В силу единственности такого разложения прямая сумма полученных разложений является разложением исходного пространства (F, V).

Упр. 9.4. Векторы $g_i \in \Bbbk^n$ вычисляются рекурсивно по формулам $g_{m-1} = h_m$, $g_{i-1} = h_i + Ag_i$ при $i \leqslant m-1$. Остаток $r = h_0 + F_v g_0 = h_0 + F_v(h_1 + F_v g_1) = h_0 + F_v(h_1 + A(h_2 + F_v g_2)) = \dots = h_0 + h_1 F_v + \dots + h_m F_v^m$ имеет степень 0 по t и тоже лежит в $\Bbbk^n$.

Упр. 9.5. Пусть $f = t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n$. Напишите матрицу F оператора умножения на класс $[t]$ в фактор кольце $\Bbbk[x]/(f)$ в базисе $[t^{n-1}], [t^{n-2}], \dots, [t], [1]$ и разложите $\det(tE - F)$ по первому столбцу.

Упр. 9.6. Поскольку умножение на произведение всех элементарных делителей полностью аннулирует прямую сумму форм. (9-1) на стр. 144, оператор $\chi_F(F)$ нулевой для любого оператора F над любым полем $\Bbbk$. Поскольку теорема Гамильтона-Кэли для матрицы A представляет собою набор тождеств между многочленами с целыми коэффициентами от элементов матрицы A, достаточно убедиться в её справедливости для всех матриц с рациональными элементами, т. е. для любого оператора над полем $\mathbb{Q}$.

Упр. 9.7. Пусть $f(t) = \mu_{v,F}(t) g(t) + r(t)$, где либо $r = 0$, либо $\deg r < \deg \mu_{v,F}$. Если $f(F) = 0$, то $r(F)v = 0$, что невозможно для ненулевого r с $\deg r < \deg \mu_{v,F}$ по определению многочлена $\mu_{v,F}$. Поэтому $r = 0$.

Упр. 9.8. Если оператор $q(F)$ аннулирует все векторы некоторого базиса, то он аннулирует вообще все векторы пространства.

Упр. 9.13. Так как любой вектор $h \in H$ представляется в V как $h = u + q + r$ с $u \in U$, $q \in Q$, $r \in R$, в U выполняется равенство $h = \pi(h) = \pi(u) + \pi(r)$, в котором $\pi(u) = u \in U$ и $\pi(r) \in W$, т. е. $U + W = H$. Если $u \in U \cap W$, то $u = \pi(r)$ для некоторого $r \in R$, и $\pi(u - r) = \pi(u) - \pi(r) = u - u = 0$, откуда $u - r \in \ker \pi = Q$, что возможно только при $u = r = 0$. Поэтому $U \cap W = 0$.

Упр. 9.14. Если $\lambda \in \operatorname{Spec} F$ и $g(\lambda) \neq 0$, то $g(F)$ действует на ненулевом собственном подпространстве V_λ умножением на ненулевое число $g(\lambda)$. Тем самым, $g(F) \neq 0$.

Упр. 9.15. Над алгебраически замкнутым полем всякий многочлен имеющий только один корень 0 равен t^m. Поэтому $\chi_F(t) = t^m$ и по теореме Гамильтона – Кэли $F^m = 0$.

Упр. 9.18. Разложение характеристического многочлена оператора F в виде произведения степеней попарно разных линейных форм $\chi_F(t) = \prod\limits_{\lambda \in \operatorname{Spec} F} (t - \lambda)^{N_\lambda}$ удовлетворяет условиям теор. 9.2

с $q_i = (t-\lambda)^{N_\lambda}$, а корневые подпространства $K_\lambda = \ker(\lambda\,\mathrm{Id} - F)^{N_\lambda}$.

Упр. 9.19. Над полем $\mathbb{C}$ можно применить предл. 9.10. Над произвольным полем $\Bbbk$ оператор F с матрицей $J_n(\lambda)$ имеет вид $\lambda\mathrm{Id} + N$, где $N^n = 0$, но $N^{n-1} \neq 0$. Обратный оператор

$$F^{-1} = (\lambda\mathrm{Id} + N)^{-1} = \lambda^{-1}(\mathrm{Id} + N/\lambda)^{-1} = \lambda^{-1} - \lambda^{-2}N + \lambda^{-3}N^2 - \ldots + (-1)^{n-1}\lambda^{-n}N^{n-1}$$

имеет вид $\lambda^{-1}\mathrm{Id} + M$, где оператор $M = -\lambda^{-2}N(1 - \lambda^{-1}N + \ldots)$ тоже имеет $M^n = 0$, а $M^{n-1} = \lambda^{2(1-n)}N^{n-1} \neq 0$. Таким образом, ЖНФ оператора F^{-1} это одна клетка $J_n\left(\lambda^{-1}\right)$.

Упр. 9.20. В $\Bbbk[\![x]\!]$ квадрат ряда $\sqrt{1+x}$ равен $1 + x$, а коэффициенты при x^k для $0 \leqslant k \leqslant n$ у квадрата ряда $\sqrt{1+x}$ такие же, как и у квадрата многочлена из условия.

Упр. 9.21. Если $a^n = 0$, $b^m = 0$ и $ab = ba$, то $(a-b)^{m+n-1} = 0$ по формуле Ньютона.