О множествах и отображениях

В этом разделе собраны некоторые факты о множествах и отображениях, которые будут использоваться в нашем курсе. Я надеюсь, что многие из них знакомы читателю из школы, ну а те, что не знакомы, будут в самое ближайшее время изучены в параллельном нашему курсе теории множеств и топологии. Нет нужды «учить» данный раздел *перед* тем, как браться за курс алгебры. Но к нему стоит выборочно обращаться всякий раз, когда Вы почувствуете себя неуверенно в тех или иных рассуждениях, использующих множества, отображения, отношения или незнакомую Вам комбинаторику.

0.1. Множества. В наши цели не входит построение логически строгой теории множеств. Для понимания этого курса достаточно школьного интуитивного представления о множестве как «абстрактной совокупности элементов произвольной природы». Элементы множеств мы часто будем называть *точками*. Все точки в любом множестве, по определению, различны.

Множество X задано, как только про любой объект можно сказать, является он элементом множества X или нет. Принадлежность точки x множеству X записывается как $x \in X$. Два множества *равны*, если они состоят из одних и тех же элементов. Существует единственное множество, не содержащее ни одного элемента. Оно называется *пустым* и обозначается $\varnothing$. Если множество X конечно, то мы обозначаем через $|X|$ количество точек в нём.

Множество X называется *подмножеством* множества Y, если каждый его элемент $x \in X$ лежит также и в Y. В этом случае пишут $X \subset Y$. Отметим, что пустое множество является подмножеством любого множества и всякое множество является подмножеством самого себя. Подмножества, отличные от всего множества, называются *собственными*. В частности, пустое подмножество непустого множества собственное. Если надо указать, что X является собственным подмножеством в Y, используется обозначение $X \subsetneq Y$.

Упражнение 0.1. Сколько всего подмножеств (включая пустое и несобственное) имеется у множества, состоящего из n элементов?

Для заданных множеств X, Y их *объединение* $X \cup Y$ состоит из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств X, Y; *пересечение* $X \cap Y$ состоит из всех элементов, принадлежащих одновременно каждому из множеств X, Y; *разность* $X \smallsetminus Y$ состоит из всех элементов множества X, которые не содержатся в Y.

Упражнение 0.2. Проверьте, что операция пересечения выражается через разность по формуле $X \cap Y = X \smallsetminus (X \smallsetminus Y)$. Можно ли выразить разность через пересечение и объединение?

Если множество X является объединением непересекающихся подмножеств Y и Z, то говорят, что X является *дизъюнктным объединением* Y и Z и пишут $X = Y \sqcup Z$.

Множество $X \times Y$, элементами которого по определению являются всевозможные пары (x, y) с $x \in X$, $y \in Y$, называется *декартовым* (или *прямым*) *произведением* множеств X и Y.

0.2. Отображения. Отображение $f: X \to Y$ из множества X в множество Y есть правило, однозначно сопоставляющее каждой точке $x \in X$ некоторую точку $y = f(x) \in Y$, которая называется *образом* точки x при отображении f. Множество всех таких точек $x \in X$, образ которых равен заданной точке $y \in Y$, называется *полным прообразом* точки y или *слоем* отображения f над y и обозначается

$$f^{-1}(y) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \mid f(x) = y\}.$$

Полные прообразы различных точек не пересекаются и могут быть как пустыми, так и состоять из многих точек. Множество всех $y \in Y$, имеющих непустой прообраз, называется *образом отображения* $f: X \to Y$ и обозначается

$$\operatorname{im}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in Y \mid f^{-1}(y) \neq \varnothing\} = \{y \in Y \mid \exists\, x \in X : f(x) = y\}.$$

Два отображения $f: X \to Y$ и $g: X \to Y$ *равны*, если $f(x) = g(x)$ для всех $x \in X$. Множество всех отображений из множества X в множество Y обозначается $\operatorname{Hom}(X, Y)$.

Отображение $f: X \to Y$ называется *наложением* (а также *сюрьекцией* или *эпиморфизмом*), если $\operatorname{im}(f) = Y$, т. е. когда прообраз каждой точки $y \in Y$ не пуст. Мы будем изображать сюрьективные отображения стрелками $X \twoheadrightarrow Y$. Отображение f называется *вложением* (а также *инъекцией*, или *мономорфизмом*), если $f(x_1) \neq f(x_2)$ при $x_1 \neq x_2$, т. е. когда прообраз каждой точки $y \in Y$ содержит не более одного элемента. Инъективные отображения изображаются стрелками $X \hookrightarrow Y$.

Упражнение 0.3. Перечислите все отображения $\{0, 1, 2\} \to \{0, 1\}$ и $\{0, 1\} \to \{0, 1, 2\}$. Сколько среди них вложений и сколько наложений?

Отображение $f: X \to Y$, которое является одновременно и вложением и наложением, называется *взаимно однозначным* (а также *биекцией* или *изоморфизмом*). Биективность отображения f означает, что для каждого $y \in Y$ существует единственный такой $x \in X$, что $f(x) = y$. Мы будем обозначать биекции стрелками $X \xrightarrow{\sim} Y$.

Упражнение 0.4. Из отображений: а) $\mathbb{N} \to \mathbb{N} : x \mapsto x^2$ б) $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : x \mapsto x^2$ в) $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : x \mapsto 7x$ г) $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q} : x \mapsto 7x$ выделите все инъекции, все сюрьекции и все биекции.

Отображения $X \to X$ из множества X в себя обычно называют *эндоморфизмами* множества X. Множество всех эндоморфизмов обозначается $\operatorname{End}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Hom}(X, X)$.

Упражнение 0.5 (принцип Дирихле). Покажите, что следующие три условия на множество X равносильны: а) X бесконечно б) существует вложение $X \hookrightarrow X$, не являющееся наложением в) существует наложение $X \twoheadrightarrow X$, не являющееся вложением.

Взаимно однозначные эндоморфизмы $X \xrightarrow{\sim} X$ называются *автоморфизмами* X. Множество всех автоморфизмов обозначается через $\operatorname{Aut}(X)$. Автоморфизмы можно воспринимать как *перестановки* элементов множества X. У всякого множества X имеется *тождественный автоморфизм* $\mathrm{Id}_X : X \to X$, который переводит каждый элемент в самого себя: $\forall\, x \in X\ \mathrm{Id}_X(x) = x$.

Упражнение 0.6. Счётно[1] ли множество $\operatorname{Aut}(\mathbb{N})$?

[1] Множество M называется *счётным* если существует биекция $\mathbb{N} \xrightarrow{\sim} M$.

Пример 0.1 (запись отображений словами)
Рассмотрим множества $X = \{1, 2, \dots, n\}$ и $Y = \{1, 2, \dots, m\}$, сопоставим каждому отображению $f : X \to Y$ последовательность его значений:

$$w(f) \stackrel{\text{def}}{=} \big(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\big) \tag{0-1}$$

и будем воспринимать её как n-буквенное слово, написанное при помощи m-буквенного алфавита Y. Так, отображениям $f : \{1, 2\} \to \{1, 2, 3\}$ и $g : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$, действующим по правилам $f(1) = 3, f(2) = 2$ и $g(1) = 1, g(2) = 2, g(3) = 2$, сопоставятся слова $w(f) = (3, 2)$ и $w(g) = (1, 2, 2)$, составленные из букв алфавита $\{1, 2, 3\}$. Запись отображения словом задаёт биекцию

$$w : \operatorname{Hom}(X, Y) ⥲ \{\text{слова из } |X| \text{ букв в алфавите } Y\}, \quad f \mapsto w(f). \tag{0-2}$$

Инъективные отображения записываются при этом словами, в которых нет повторяющихся букв, а сюрьективные отображения — словами, в которых используются все без исключения буквы алфавита Y. Взаимно однозначным отображениям отвечают слова, в которых каждая буква алфавита Y встречается ровно один раз.

Предложение 0.1
Если множества X и Y конечны, то $|\operatorname{Hom}(X, Y)| = |Y|^{|X|}$.

Доказательство. Пусть X состоит из n элементов, а Y — из m, как в прим. 0.1 выше. Нас интересует количество всех n-буквенных слов, которые можно написать при помощи алфавита из m букв. Обозначим его через $W_m(n)$ и выпишем все эти слова на m страницах, поместив на i-ю страницу все слова, начинающиеся на i-ю букву алфавита. В результате на каждой странице окажется ровно по $W_m(n-1)$ слов. Поэтому $W_m(n) = m \cdot W_m(n-1) = m^2 \cdot W(n-2) = \dots = m^{n-1} \cdot W_m(1) = m^n$. □

Замечание 0.1. В виду предл. 0.1 множество $\operatorname{Hom}(X, Y)$ всех отображений $X \to Y$ часто обозначают Y^X. В доказательстве предл. 0.1 мы молчаливо предполагали, что оба множества непусты. Если $X = \varnothing$, то для любого множества Y множество $\operatorname{Hom}(\varnothing, Y)$ по определению состоит из единственного элемента — вложения $\varnothing$ в Y в качестве пустого подмножества или, что то же самое, пустого слова в алфавите Y. В этом случае предл. 0.1 остаётся в силе: $|\operatorname{Hom}(\varnothing, Y)| = 1 = |Y|^0$. В частности, $\operatorname{Hom}(\varnothing, \varnothing)$ тоже состоит из одного элемента[1] — тождественного автоморфизма $\mathrm{Id}_{\varnothing}$. Если $Y = \varnothing$, а $X \neq \varnothing$, то $\operatorname{Hom}(X, \varnothing) = \varnothing$, что тоже согласуется с предл. 0.1, ибо $0^{|X|} = 0$ при $|X| > 0$.

Предложение 0.2
Если $|X| = n$, то $|\operatorname{Aut}(X)| = n! \stackrel{\text{def}}{=} n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1$.

Доказательство. Пусть $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Биекции $X ⥲ X$ записываются n-буквенными словами в n-буквеном алфавите $x_1, \dots, x_n$, содержащими каждую букву x_i ровно по одному разу. Обозначим количество таких слов через $V(n)$ и выпишем их по алфавиту на n

[1] Т. е. 0^0 в этом контексте оказывается равным 1.

страницах, поместив на i-тую страницу все слова, начинающиеся на x_i. Тогда на каждой странице будет ровно $V(n-1)$ слов, откуда $V(n) = n \cdot V(n-1) = n \cdot (n-1) \cdot V(n-2) = = \ldots = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot V(1) = n!$. □

Замечание 0.2. Число $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1$ называется *n-факториал*. Так как множество $\mathrm{Aut}(\varnothing)$ состоит из одного элемента $\mathrm{Id}_\varnothing$, мы полагаем $0! \stackrel{\text{def}}{=} 1$.

0.3. Слои отображений. Задание отображения $f : X \to Y$ равносильно указанию подмножества $\mathrm{im}(f) \subset Y$ и разбиению множества X в дизъюнктное объединение непустых подмножеств $f^{-1}(y)$, занумерованных точками $y \in \mathrm{im}(f)$:

$$X = \bigsqcup\nolimits_{y \in \mathrm{im}(f)} f^{-1}(y)\,. \tag{0-3}$$

Такой взгляд на отображения часто оказывается полезным при подсчёте количества элементов в том или ином множестве. Например, когда все непустые слои отображения $f : X \to Y$ состоят из одного и того же числа точек $m = |f^{-1}(y)|$, число элементов в образе отображения f связано с числом элементов в множестве X соотношением

$$|X| = m \cdot |\,\mathrm{im}\, f\,|\,, \tag{0-4}$$

которое при всей своей простоте имеет много разнообразных применений.

Пример 0.2 (мультиномиальные коэффициенты)
При раскрытии скобок в выражении $(a_1 + \ldots + a_m)^n$ получится сумма одночленов вида $a_1^{k_1} \ldots a_m^{k_m}$, где каждый показатель k_i заключён в пределах $0 \leqslant k_i \leqslant n$, а общая степень $k_1 + \ldots + k_m = n$. Коэффициент, возникающий при таком одночлене после приведения подобных слагаемых, называется *мультиномиальным коэффициентом* и обозначается $\binom{n}{k_1 \ldots k_m}$. Таким образом,

$$(a_1 + \ldots + a_m)^n = \sum_{\substack{k_1 + \ldots + k_m = n \\ \forall i\ 0 \leqslant k_i \leqslant n}} \binom{n}{k_1 \ldots k_m} \cdot a_1^{k_1} \ldots a_m^{k_m}\,, \tag{0-5}$$

Чтобы явно выразить $\binom{n}{k_1 \ldots k_m}$ через $k_1, \ldots, k_m$, заметим, что раскрытие n скобок

$$(a_1 + \ldots + a_m)(a_1 + \ldots + a_m) \ldots (a_1 + \ldots + a_m)$$

заключается в выборе внутри каждой из скобок какой-нибудь одной буквы и выписывании их слева направо друг за другом в одно n-буквенное слово. Это надо сделать всеми возможными способами и сложить все полученные слова. Подобные слагаемые, вносящие вклад в коэффициент при $a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m}$, суть слова, состоящие ровно из k_1 букв a_1, k_2 букв a_2, … , k_m букв a_m. Количество таких слов легко подсчитать по формуле (0-4). А именно, сделаем на время k_1 букв a_1 попарно разными, снабдив каждую из них дополнительным верхним индексом; аналогично поступим с k_2 буквами a_2, k_3 буквами

a_3 и т. д. В результате получим $n = k_1 + \ldots + k_m$ попарно разных букв:

$$\underbrace{a_1^{(1)}, a_1^{(2)}, \ldots, a_1^{(k_1)}}_{k_1 \text{ меченых букв } a_1}, \underbrace{a_2^{(1)}, a_2^{(2)}, \ldots, a_2^{(k_2)}}_{k_2 \text{ меченых букв } a_2}, \ldots\ldots\ldots, \underbrace{a_m^{(1)}, a_m^{(2)}, \ldots, a_m^{(k_m)}}_{k_m \text{ меченых букв } a_m}.$$

Обозначим через X множество всех n-буквенных слов, которые можно написать этими n различными буквами, используя каждую букву ровно по одному разу. Как мы уже знаем, $|X| = n!$. В качестве Y возьмём интересующее нас множество слов из k_1 одинаковых букв a_1, k_2 одинаковых букв a_2, и т. д. и рассмотрим отображение $f : X \to Y$, стирающее верхние индексы у всех букв. Оно эпиморфно, и полный прообраз каждого слова $y \in Y$ состоит из $k_1! \cdot k_2! \cdot \ \ldots \ \cdot k_m!$ слов, которые получаются из y всевозможными расстановками k_1 верхних индексов у букв a_1, k_2 верхних индексов у букв a_2, и т. д. По формуле (0-4)

$$\binom{n}{k_1 \ldots k_m} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ \ldots \ \cdot k_m!}. \tag{0-6}$$

Тем самым, разложение (0-5) имеет вид

$$(a_1 + \ldots + a_m)^n = \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_m=n \\ \forall i \ 0 \leqslant k_i \leqslant n}} \frac{n! \cdot a_1^{k_1} \ldots a_m^{k_m}}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_m!}. \tag{0-7}$$

Упражнение 0.7. Сколько всего слагаемых в правой части формулы (0-7) ?

В частности, при $m = 2$ мы получаем известную формулу для раскрытия бинома с натуральным показателем[1]:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^k b^{n-k}. \tag{0-8}$$

При $m = 2$ мультиномиальный коэффициент $\binom{n}{k,n-k}$ принято обозначать $\binom{n}{k}$ или C_n^k и называть k-тым *биномиальным коэффициентом* степени n или *числом сочетаний* из n по k. Он равен

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1}$$

(сверху и снизу стоит по k последовательно убывающих сомножителей).

Пример 0.3 (диаграммы Юнга)

Разбиение конечного множества $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ в объединение непересекающихся подмножеств

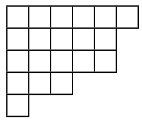
$$X = X_1 \sqcup X_2 \sqcup \ldots \sqcup X_k \tag{0-9}$$

[1]Это частный случай *формулы Ньютона*, которую в полной общности мы обсудим в n° 3.3.2 на стр. 62, когда будем заниматься степенными рядами.

можно кодировать следующим образом. Занумеруем подмножества в порядке нестрогого убывания их размера и обозначим количество элементов в i-том подмножестве через $\lambda_i = |X_i|$. Получим невозрастающую последовательность чисел

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k), \quad \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \dots \geqslant \lambda_k,$$

которая называется *формой* разбиения (0-9). Форму разбиения удобно изображать *диаграммой Юнга* — картинкой вида



, (0-10)

составленной из выровненных по левому краю горизонтальных клетчатых полосок, занумерованных сверху вниз, так что в i-й сверху полоске λ_i клеток. Общее число клеток в диаграмме λ называется её *весом* и обозначается $|\lambda|$, а количество строк называется *длиной* и обозначается $\ell(\lambda)$. Так, диаграмма Юнга (0-10) отвечает разбиению формы $\lambda = (6, 5, 5, 3, 1)$, имеет вес $|\lambda| = 20$ и длину $\ell(\lambda) = 5$.

Упражнение 0.8. Подсчитайте количество всех диаграмм Юнга, умещающихся в прямоугольнике размером $k \times n$ клеток (включая пустую диаграмму и сам прямоугольник).

Будем называть *заполнением* диаграммы λ множеством X из $|X| = |\lambda|$ элементов произвольную расстановку этих элементов в клетки диаграммы по одному элементу в каждую клетку. Таким образом, всякая диаграмма λ веса n имеет $n!$ различных заполнений заданным n-элементным множеством X.

Объединяя элементы, стоящие в i-й строке диаграммы в одно подмножество X_i, мы получаем разбиение множества X в дизъюнктное объединение k непересекающихся подмножеств $X_1, \dots, X_k$. Поскольку любое разбиение (0-9) заданной формы λ можно получить таким образом, возникает сюрьективное отображение из множества заполнений диаграммы λ в множество разбиений множества X формы λ. Покажем, что все слои этого отображения состоят из одного и того же числа элементов. Два заполнения приводят к одинаковым разбиениям тогда и только тогда, когда они получаются друг из друга перестановками элементов внутри строк и перестановками строк одинаковой длины между собою как единого целого. Если обозначить через $m_i = m_i(\lambda)$ число строк длины[1] i в диаграмме λ, то перестановок первого типа будет $\prod \lambda_i! = \prod_{i=1}^{n} (i!)^{m_i}$ штук, а второго типа — $\prod_{i=1}^{n} m_i!$ штук. Так как все эти перестановки действуют независимо друг от друга, каждый слой нашего отображения состоит из $\prod_{i=1}^{n} (i!)^{m_i} m_i!$ элементов. Из формулы (0-4) вытекает

Предложение 0.3

Число разбиений n-элементного множества X в дизъюнктное объединение m_1 1-элементных, m_2 2-элементных, … , m_n n-элементных подмножеств равно

$$\frac{n!}{\prod_{i=1}^{n} m_i! \cdot (i!)^{m_i}}. \tag{0-11}$$

[1]Отметим, что многие $m_i = 0$, поскольку $|\lambda| = n = m_1 + 2m_2 + \dots + nm_n$.

0.4. Классы эквивалентности. Альтернативный способ разбить заданное множество X в дизъюнктное объединение подмножеств состоит в том, чтобы объявить элементы, входящие в одно подмножество такого разбиения «эквивалентными». Формализуется это так. Назовём *бинарным отношением* на множестве X любое подмножество

$$R \subset X \times X = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in X\}\,.$$

Принадлежность пары (x_1, x_2) отношению R обычно записывают как $x_1 \underset{R}{\sim} x_2$.

Например, на множестве целых чисел $X = \mathbb{Z}$ имеются бинарные отношения

$$\text{равенство} \qquad x_1 \underset{R}{\sim} x_2 \overset{\text{def}}{\iff} x_1 = x_2 \tag{0-12}$$

$$\text{неравенство} \qquad x_1 \underset{R}{\sim} x_2 \overset{\text{def}}{\iff} x_1 \leqslant x_2 \tag{0-13}$$

$$\text{делимость} \qquad x_1 \underset{R}{\sim} x_2 \overset{\text{def}}{\iff} x_1 | x_2 \tag{0-14}$$

$$\text{сравнимость по модулю } n \qquad x_1 \underset{R}{\sim} x_2 \overset{\text{def}}{\iff} x_1 \equiv x_2 \pmod n \tag{0-15}$$

(последнее условие $x_1 \equiv x_2 \pmod n$ читается как «x_1 сравнимо с x_2 по модулю n» и по определению означает, что $x_1 - x_2$ делится на n).

Определение 0.1

Бинарное отношение $\underset{R}{\sim}$ называется *эквивалентностью*, если оно обладает следующими тремя свойствами:

$$\begin{aligned}
\textit{рефлексивность}: &\quad \forall\, x \in X \; x \underset{R}{\sim} x \\
\textit{транзитивность}: &\quad \forall\, x_1, x_2, x_3 \in X \text{ из } x_1 \underset{R}{\sim} x_2 \text{ и } x_2 \underset{R}{\sim} x_3 \text{ вытекает } x_1 \underset{R}{\sim} x_3 \\
\textit{симметричность}: &\quad \forall\, x_1, x_2 \in X \; x_1 \underset{R}{\sim} x_2 \iff x_2 \underset{R}{\sim} x_1.
\end{aligned}$$

Среди бинарных отношений (0-12) – (0-15) первое и последнее являются эквивалентностями, а (0-13) и (0-14) не являются (они не симметричны).

Если множество X разбито в объединение непересекающихся подмножеств, то отношение $x_1 \sim x_2$, означающее, что x_1 и x_2 лежат в одном и том же подмножестве этого разбиения, очевидно, является эквивалентностью.

Наоборот, пусть на множестве X задано отношение эквивалентности R. Рассмотрим для каждого $x \in X$ подмножество в X, состоящее из всех элементов, эквивалентных x. Оно называется *классом эквивалентности* элемента x и обозначается

$$[x]_R = \{z \in X \mid x \underset{R}{\sim} z\} = \{z \in X \mid z \underset{R}{\sim} x\}$$

(второе равенство выполняется благодаря симметричности отношения R). Любые два класса $[x]_R$ и $[y]_R$ либо вообще не пересекаются, либо полностью совпадают. В самом деле, если существует элемент z, эквивалентный и x и y, то в силу симметричности и транзитивности отношения $\underset{R}{\sim}$ элементы x и y будут эквивалентны между собой, а значит, любой элемент, эквивалентный x, будет эквивалентен также и y, и наоборот. Таким образом, множество X распадается в дизъюнктное объединение различных классов эквивалентности.

Множество классов эквивалентности по отношению $R \subset X \times X$ обозначается X/R и называется *фактором* множества X по эквивалентности R. Сюрьекция

$$f : X \twoheadrightarrow X/R\,, \quad x \mapsto [x]_R\,, \tag{0-16}$$

сопоставляющая каждому элементу $x \in X$ его класс эквивалентности $[x]_R \in X/R$, называется *отображением факторизации*. Слои этого отображения суть классы эквивалентных элементов. Наоборот, любое сюрьективное отображение $f : X \twoheadrightarrow Y$ является отображением факторизации по отношению эквивалентности $x_1 \sim x_2$, означающему, что $f(x_1) = f(x_2)$.

Пример 0.4 (классы вычетов)
Фиксируем ненулевое целое число $n \in \mathbb{Z}$. Фактор множества целых чисел $\mathbb{Z}$ по отношению сравнимости по модулю n из (0-15) обозначается $\mathbb{Z}/(n)$. Мы будем записывать его элементы символами $[z]_n$, где $z \in \mathbb{Z}$, и опускать индекс n, когда понятно чему он равен. Класс эквивалентности

$$[z]_n \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{Z} \mid (z - x) \vdots\, n\} \tag{0-17}$$

называется *классом вычетов по модулю n*. Отображение факторизации

$$\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/(n)\,, \quad z \mapsto [z]_n$$

называется *приведением по модулю n*. Множество $\mathbb{Z}/(n)$ состоит из n различных классов

$$[0]_n\,,\ [1]_n\,,\ \dots\,,\ [n-1]_n\,.$$

При желании их можно воспринимать как остатки от деления на n, но в практических вычислениях удобнее работать с ними именно как с *подмножествами* в $\mathbb{Z}$, поскольку возможность по-разному записывать один и тот же класс часто упрощает вычисления. Например, остаток от деления 12^{100} на 13 можно искать как

$$\left[12^{100}\right]_{13} = [12]_{13}^{100} = [-1]_{13}^{100} = \left[(-1)^{100}\right]_{13} = [1]_{13}\,. \tag{0-18}$$

Упражнение 0.9. Докажите правомочность этого вычисления: проверьте, что классы вычетов $[x+y]_n$ и $[xy]_n$ не зависят от выбора чисел $x \in [x]_n$ и $y \in [y]_n$, т. е. правила

$$[x]_n + [y]_n \overset{\text{def}}{=} [x+y]_n \tag{0-19}$$

$$[x]_n \cdot [y]_n \overset{\text{def}}{=} [xy]_n \tag{0-20}$$

корректно определяют на множестве $\mathbb{Z}/(n)$ операции сложения и умножения[1].

[1]Именно такое умножение $[12]^{100} = \underbrace{[12] \cdot [12] \cdot \ldots \cdot [12]}_{100} = \left[12^{100}\right]$ было использовано в (0-18).

0.4.1. Неявное задание эквивалентности. Для любого семейства отношений эквивалентности $R_\nu \subset X \times X$ пересечение $\bigcap_\nu R_\nu \subset X \times X$ также является отношением эквивалентности. В самом деле, если каждое из множеств $R_\nu \subset X \times X$ содержит диагональ

$$\Delta = \{(x,x) \mid x \in X\} \subset X \times X\,,$$

переходит в себя при симметрии $(x,y) \leftrightarrows (y,x)$ и вместе с каждой парой точек вида (x,y), (y,z) содержит также и точку (x,z), то этими свойствами обладает и пересечение $\bigcap_\nu R_\nu$ всех этих множеств. Поэтому для любого подмножества $R \subset X \times X$ существует *наименьшее по включению* отношение эквивалентности $\overline{R}$, содержащее R, а именно, пересечение всех содержащих R отношений эквивалентности. Отношение $\overline{R}$ называется эквивалентностью, *порождённой* отношением R.

Упражнение 0.10. Проверьте, что $(x,y) \in \overline{R}$ если и только если в X существует такая конечная последовательность точек $x = z_0,\ z_1,\ z_2,\ \dots\ ,\ z_n = y$, что $(x_{i-1}, x_i) \in R$ или $(x_i, x_{i-1}) \in R$ при каждом $i = 1, 2, \dots, n$.

К сожалению, по данному подмножеству $R \subset X \times X$ не всегда легко судить о том, как устроена порождённая им эквивалентность $\overline{R}$. Даже выяснить, не окажутся ли в результате все точки эквивалентными друг другу может быть не просто.

Пример 0.5 (дроби)
Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ обычно определяют как множество дробей $a\,/\,b$ с $a, b \in \mathbb{Z}$ и $b \neq 0$. При этом под *дробью* понимается класс эквивалентности упорядоченных пар (a,b), где $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z} \smallsetminus 0$, по минимальному отношению эквивалентности, содержащему все отождествления

$$(a,b) \sim (ac, bc) \quad \text{с произвольными } c \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}\,. \tag{0-21}$$

Отношения (0-21) выражают собою равенства дробей $a\,/\,b = (ac)/(bc)$, но сами по себе не образуют эквивалентности. Например, при $a_1 b_2 = a_2 b_1$ в двухшаговой цепочке отождествлений $(a_1, b_1) \sim (a_1 b_2, b_1 b_2) = (a_2 b_1, b_1 b_2) \sim (a_2, b_2)$ самый левый и самый правый элементы могут не отождествляться напрямую по правилу (0-21), как, например, $3\,/\,6$ и $5\,/\,10$. Поэтому эквивалентность, порождённая отождествлениями (0-21), обязана содержать все отождествления

$$(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \quad \text{при} \quad a_1 b_2 = a_2 b_1\,. \tag{0-22}$$

Оказывается, что к этим отношениям больше уже ничего добавлять не надо.

Упражнение 0.11. Проверьте, что набор отношений (0-22) рефлексивен, симметричен и транзитивен.

Тем самым, он является минимальным отношением эквивалентности, содержащим все отождествления (0-21). Отметим, что если в отношениях (0-21) разрешить нулевые c, то все пары (a,b) окажутся эквивалентны паре $(0,0)$.

0.5. Композиции отображений. Отображение $X \to Z$, получающееся в результате последовательного выполнения двух отображений $f: X \to Y$ и $g: Y \to Z$ называется *композицией* отображений g и f и обозначается $g \circ f$ или просто gf. Таким образом, композиция gf определена если и только если образ f содержится в множестве, на котором определено отображение g, и $gf: X \to Z$, $x \mapsto g(f(x))$.

Хотя композицию и принято записывать точно так же, как умножение чисел, единственным общим свойством этих операций является их *ассоциативность* или *сочетательный закон*: композиция трёх последовательных отображений

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} T\ ,$$

как и произведение трёх чисел, не зависит от того, в каком порядке перемножаются последовательные пары элементов, т. е. $(hg)f = h(gf)$, если хотя бы одна из двух частей этого равенства определена. Действительно, в этом случае вторая часть тоже определена, и обе части действуют на каждую точку $x \in X$ по правилу $x \mapsto h(g(f(x)))$.

В остальном алгебраические свойства композиции весьма далеки от привычных свойств умножения чисел. Если композиция fg определена, то противоположная композиция gf часто бывает не определена. Даже если $f, g: X \to X$ являются эндоморфизмами одного и того же множества X, так что обе композиции fg и gf определены, равенство $fg = gf$ может не выполняться.

Упражнение 0.12. Рассмотрим на плоскости пару различных прямых ℓ_1, ℓ_2, пересекающихся в точке O, и обозначим через σ_1 и σ_2 осевые симметрии относительно этих прямых. Явно опишите движения плоскости, задаваемые композициями $\sigma_1\sigma_2$ и $\sigma_2\sigma_1$. При каком условии на прямые выполняется равенство $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1$?

Общие множители тоже бывает нельзя сокращать, т. е. ни равенство $fg = fh$, ни равенство $gf = hf$, вообще говоря, не влекут равенства $g = h$.

Пример 0.6 (эндоморфизмы двухэлементного множества)
Двухэлементное множество $X = \{1, 2\}$ имеет ровно четыре эндоморфизма. Если кодировать отображение $f: X \to X$ двубуквенным словом $(f(1), f(2))$, как в прим. 0.1 на стр. 7, то эти четыре эндоморфизма запишутся словами $(1,1)$, $(1,2) = \mathrm{Id}_X$, $(2,1)$ и $(2,2)$. Все композиции между ними определены, и таблица композиций gf имеет вид:

$g \diagdown f$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,2)$
$(1,1)$	$(1,1)$	$(1,1)$	$(1,1)$	$(1,1)$
$(1,2)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,2)$
$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,1)$	$(1,2)$	$(1,1)$
$(2,2)$	$(2,2)$	$(2,2)$	$(2,2)$	$(2,2)$

(0-23)

Обратите внимание на то, что $(2,2)\circ(1,1) \neq (1,1)\circ(2,2)$ и что $(1,1)\circ(1,2) = (1,1)\circ(2,1)$, хотя $(1,2) \neq (2,1)$, и $(1,1)\circ(2,2) = (2,1)\circ(2,2)$, хотя $(1,1) \neq (2,1)$.

Лемма 0.1 (левые обратные отображения)
Если $X \neq \varnothing$, то следующие условия на отображение $f: X \to Y$ эквивалентны:

1) f инъективно

2) существует такое отображение $g : Y \to X$, что $gf = \mathrm{Id}_X$

3) для любых отображений $g_1, g_2 : Z \to X$ из равенства $fg_1 = fg_2$ вытекает равенство $g_1 = g_2$.

Доказательство. Импликация (1) ⇒ (2): для точек $y = f(x) \in \operatorname{im} f$ положим $g(y) = x$, а в точках $y \notin \operatorname{im} f$ зададим g как угодно[1]. Импликация (2) ⇒ (3): если $fg_1 = fg_2$, то умножая обе части слева на любое такое отображение $g : Y \to X$, что $gf = \mathrm{Id}_X$, получаем $g_1 = g_2$. Импликация (3) ⇒ (1) доказывается от противного. Пусть $x_1 \neq x_2$, но $f(x_1) = f(x_2)$. Положим $g_1 = \mathrm{Id}_X$, и пусть $g_2 : X \xrightarrow{\sim} X$ переставляет между собою точки x_1, x_2, а все остальные точки оставляет на месте. Тогда $g_1 \neq g_2$, но $fg_1 = fg_2$. □

Определение 0.2
Отображение $f : X \to Y$, удовлетворяющее лем. 0.1, называется *обратимым слева*, и всякое такое отображение $g : Y \to X$, что $gf = \mathrm{Id}_X$, называется *левым обратным* к f или *ретракцией* Y на $f(X)$.

Упражнение 0.13. В условиях лем. 0.1 убедитесь, что вложение f тогда и только тогда имеет несколько различных левых обратных, когда оно не сюрьективно.

0.5.1. Правое обратное отображение и аксиома выбора. Стремление к гармонии побуждает желание иметь «правую» версию лем. 0.1: хочется, чтобы следующие три свойства отображения $f : X \to Y$ тоже были эквивалентны:

1) f сюрьективно

2) существует такое отображение $g : Y \to X$, что $fg = \mathrm{Id}_Y$

3) для любых отображений $g_1, g_2 : Y \to Z$ из равенства $g_1 f = g_2 f$ вытекает равенство $g_1 = g_2$.

Отображение f, удовлетворяющее свойству (2), называются *обратимым справа*, и всякое такое отображение $g : Y \to X$, что $fg = \mathrm{Id}_Y$, называется *правым обратным* к f или *сечением* эпиморфизма f. Второе название связано с тем, что отображение g, удовлетворяющее свойству (2), переводит каждую точку $y \in Y$ в точку $g(y) \in f^{-1}(y)$, лежащую в слое отображения f над точкой y. В строгой теории множеств, углубления в которую мы пытаемся избежать, импликация (1) ⇒ (2) постулируется в качестве одной из аксиом. Эта аксиома называется *аксиомой выбора* и утверждает, что в каждом слое любого сюрьективного отображения можно выбрать по элементу[2].

Итак, импликация (1) ⇒ (2) является частью строго определения понятия «множество». Доказательство импликации (2) ⇒ (3) полностью симметрично доказательству

[1] Например, отобразим их все в одну и ту же произвольно выбранную точку $x \in X$.

[2] Иными словами, если имеется множество попарно непересекающихся множеств, то в каждом из них можно выбрать по элементу.

аналогичной импликации из лем. 0.1: применяя отображения, стоящие в обеих частях равенства $g_1 f = g_2 f$, вслед за таким отображением $g : Y \to X$, что $fg = \mathrm{Id}_Y$, получаем равенство $g_1 = g_2$. Импликация (3) ⇒ (1), как и в лем. 0.1, доказывается от противного: если $y \notin \operatorname{im} f$, то свойство (3) не выполняется для отображения $g_1 = \mathrm{Id}_Y$ и любого отображения $g_2 : Y \to Y$, переводящего точку y в какую-нибудь точку из $\operatorname{im} f$ и оставляющего на месте все остальные точки. Таким образом, перечисленные выше свойства (1) – (3) действительно эквивалентны друг другу.

0.5.2. Обратимые отображения. Если отображение $g : X \xrightarrow{\sim} Y$ биективно, то прообраз $g^{-1}(y) \subset X$ каждой точки $y \in Y$ состоит ровно из одной точки. В этом случае правило $y \mapsto g^{-1}(y)$ определяет отображение $g^{-1} : Y \to X$, которое является одновременно и левым, и правым обратным к g в смысле опр. 0.2 и n° 0.5.1, т. е.

$$g \circ g^{-1} = \mathrm{Id}_Y \qquad \text{и} \qquad g^{-1} \circ g = \mathrm{Id}_X \tag{0-24}$$

Отображение g^{-1} называется *обратным* к биективному отображению g.

Предложение 0.4
Следующие условия на отображение $g : X \to Y$ эквивалентны друг другу:

1) g взаимно однозначно
2) существует такое отображение $g' : Y \to X$, что[1] $g \circ g' = \mathrm{Id}_Y$ и $g' \circ g = \mathrm{Id}_X$
3) g обладает левым и правым обратными отображениями[2].

При выполнении этих условий все левые и правые обратные к g отображения равны друг другу и отображению g^{-1}, описанному перед формулировкой предложения.

Доказательство. Импликация (1) ⇒ (2) уже была установлена. Очевидно, что (2) ⇒ (3). Докажем, что (3) ⇒ (2). Если у отображения $g : X \to Y$ есть левое обратное $f : Y \to X$ и правое обратное $h : Y \to X$, то $f = f \circ \mathrm{Id}_Y = f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h = \mathrm{Id}_X \circ h = h$ и условие (2) выполнено для $g' = f = h$. Остаётся показать, что (2) ⇒ (1), и $g' = g^{-1}$. Так как $g(g'(y)) = y$ для любого $y \in Y$, прообраз $g^{-1}(y)$ каждой точки $y \in Y$ содержит точку $g'(y)$. С другой стороны, поскольку для всех $x \in g^{-1}(y)$ выполнено равенство $x = \mathrm{Id}_X(x) = g'(g(x)) = g'(y)$, прообраз $f^{-1}(y)$ состоит из единственной точки $g'(y)$, т. е. g — биекция, и $g' = g^{-1}$. □

0.6. Группы преобразований. Непустой набор G взаимно однозначных отображений множества X в себя называется *группой преобразований* множества X, если вместе с каждым отображением $g \in G$ в G лежит и обратное к нему отображение g^{-1}, а вместе с каждыми двумя отображениями $f, g \in G$ в G лежит и их композиция fg. Эти условия гарантируют, что тождественное преобразование Id_X тоже лежит в G, поскольку

[1] Т. е. g' *двусторонне* обратно к g.

[2] Обратите внимание, что совпадения левого обратного отображения с правым обратным отображением не требуется.

$\mathrm{Id}_X = g^{-1}g$ для любого $g \in G$. Если группа преобразований G конечна, число элементов в ней обозначается $|G|$ и называется *порядком* группы G. Если подмножество $H \subset G$ тоже является группой, то H называются *подгруппой* группы G.

Пример 0.7 (группы перестановок)
Множество $\mathrm{Aut}(X)$ всех взаимно однозначных отображений $X \to X$ является группой. Эта группа называется *симметрической группой* или *группой перестановок* множества X. Все прочие группы преобразований множества X являются подгруппами этой группы. Группа перестановок n-элементного множества $\{1, 2, \dots , n\}$ обозначается S_n и называется n-й *симметрической группой*. Согласно предл. 0.2 на стр. 7 порядок $|S_n| = n!$. Перестановки

$$\sigma : \{1, 2, \dots , n\} \to \{1, 2, \dots , n\}$$

принято записывать строчками $\sigma = (\sigma_1, \dots , \sigma_n)$ их значений $\sigma_i \overset{\text{def}}{=} \sigma(i)$, как в прим. 0.1 на стр. 7. Например, перестановки $\sigma = (3, 4, 2, 1)$ и $\tau = (2, 3, 4, 1)$ представляют собою отображения

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \text{и} & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 4 & 2 & 1 & & 2 & 3 & 4 & 1 \end{array}$$

а их композиции записываются как $\sigma\tau = (4, 2, 1, 3)$ и $\tau\sigma = (4, 1, 3, 2)$.

Упражнение 0.14. Составьте таблицу умножения шести элементов группы S_3, аналогичную таблице (0-23) на стр. 14.

Пример 0.8 (абелевы группы)
Группа G, в которой любые два элемента $f, g \in G$ перестановочны, т. е. удовлетворяют соотношению $fg = gf$, называется *коммутативной* или *абелевой*. Примерами абелевых групп являются группы параллельных переносов плоскости или пространства, а также группа SO_2 поворотов плоскости вокруг фиксированной точки. Для каждого натурального $n \geqslant 2$ повороты на углы, кратные $2\pi/n$, образуют в группе SO_2 конечную подгруппу. Она называется *циклической группой порядка* n.

0.7. Частично упорядоченные множества. Бинарное отношение[1] $x \leqslant y$ на множестве Z называется *частичным порядком*, если оно рефлексивно и транзитивно[2], но в отличие от эквивалентности не симметрично, а *кососимметрично*, т. е. из $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$ вытекает равенство $x = y$. Если на множестве задан частичный порядок, мы пишем $x < y$, когда $x \leqslant y$ и $x \neq y$. Частичный порядок на множестве Z называется *линейным* (или просто *порядком*), если любые два элемента сравнимы, т. е. для всех $x, y \in Z$ выполняется одно из трёх альтернативных условий: или $x < y$, или $x = y$, или $y < x$. Например, обычное неравенство между числами является линейным порядком на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$, тогда как отношение делимости $n \mid m$, означающее, что n

[1]См. n° 0.4 на стр. 11.
[2]Ср. с опр. 0.1 на стр. 11.

делит m, задаёт на $\mathbb{N}$ частичный порядок, который не является линейным. Другим важным примером частичного, но не линейного порядка является отношение включения $X \subseteq Y$ на множестве $\mathcal{S}(M)$ всех подмножеств заданного множества M.

Упражнение 0.15 (предпорядок). *Предпорядком* на множестве Z называется любое рефлексивное транзитивное бинарное отношение $x \prec y$. Убедитесь, что для каждого предпорядка бинарное отношение $x \sim y$, означающее, что одновременно $x \prec y$ и $y \prec x$, является отношением эквивалентности, и на факторе $Z/\sim$ корректно определено[1] бинарное отношение $[x] \leqslant [y]$, означающее, что $x \precsim y$, которое является частичным порядком. Продумайте, как всё это работает для отношения делимости $n \mid m$ на множестве целых чисел $\mathbb{Z}$.

Множество P с зафиксированным на нём частичным порядком называется *частично упорядоченным множеством*, сокращённо — чумом. Если порядок линейный, чум P называется *линейно упорядоченным*. Всякое подмножество X любого чума P также является чумом по отношению к частичному порядку, имеющемуся на P. Если этот индуцированный с P порядок на X оказывается линейным, подмножество $X \subset P$ называют *цепью* в чуме P. Элементы x, y чума P называются *сравнимыми*, если $x \leqslant y$ или $y \leqslant x$. Если же ни одно из этих условий не выполняется, то x и y называются *несравнимыми*. Несравнимые элементы автоматически различны. Частичный порядок линеен тогда и только тогда, когда любые два элемента сравнимы.

Отображение $f : M \to N$ между чумами M, N называется *сохраняющим порядок*[2] или *морфизмом* чумов, если $f(x) \leqslant f(y)$ для всех $x \leqslant y$. Два чума M, N называются *изоморфными*, если имеется сохраняющая порядок биекция $M \xrightarrow{\sim} N$. В таком случае мы пишем $M \simeq N$. Отображение f называется *строго возрастающим*, если $f(x) < f(y)$ для всех $x < y$. Всякое сохраняющее порядок вложение является строго возрастающим. Обратное справедливо для возрастающих отображений из линейного упорядоченного множества, однако неверно в общем случае.

Элемент y чума P называется *верхней гранью* подмножества $X \subset P$, если $x \leqslant y$ для всех $x \in X$. Если при этом $y \notin X$, то верхняя грань y называется *внешней*. В таком случае для всех $x \in X$ выполнено строгое неравенство $x < y$.

Элемент $m^* \in X$ называется *максимальным* в подмножестве $X \subset P$, если для $x \in X$ неравенство $m^* \leqslant x$ выполняется только при $x = m^*$. Заметьте, что максимальный элемент не обязан быть сравним со всеми элементами $x \in X$ и, тем самым, может не являться верхней гранью для X. Частично упорядоченное множество может иметь несколько различных максимальных элементов или не иметь их вовсе, как, например, чум $\mathbb{N}$ отношению к делимости или к обычному неравенству между числами. Линейно упорядоченный чум имеет не более одного максимального элемента, и если такой элемент существует, то он является верхней гранью.

Симметричным образом, элемент $m_* \in X$ называется *минимальным* в X, если для $x \in X$ неравенство $m_* \geqslant x$ выполняется только при $x = m_*$. Аналогично определяются и нижние грани, и всё сказанное выше о максимальных элементах и верхних гранях в равной степени относится и к минимальным элементам и нижним граням.

[1] Т. е. выполнение или невыполнение условия $x \precsim y$ не зависит от выбора представителей x и y в классах $[x]$ и $[y]$.

[2] А также *неубывающим* или *нестрого возрастающим*.

0.8. Вполне упорядоченные множества. Линейно упорядоченное множество W называется *вполне упорядоченным*, если каждое непустое подмножество $S \subset W$ содержит такой элемент $s_* \in S$, что $s_* \leqslant s$ для всех $s \in S$. Этот элемент автоматически единствен и называется *начальным элементом* подмножества S. Например, множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ со стандартным отношением неравенства между числами вполне упорядочено, как и любое дизъюнктное объединение вида $\mathbb{N} \sqcup \mathbb{N} \sqcup \mathbb{N} \sqcup \ldots$, в котором все элементы каждой копии множества $\mathbb{N}$ полагаются строго большими всех элементов всех предыдущих копий. Пустое множество тоже вполне упорядочено. Напротив, множество $\mathbb{Q}$ со стандартным отношением неравенства между числами не является вполне упорядоченным.

Вполне упорядоченные множества замечательны тем, что их элементы можно рекурсивно перебрать точно так же, как и элементы множества $\mathbb{N}$. А именно, пусть некоторое утверждение $\Phi(w)$ зависит от элемента w вполне упорядоченного множества W. Если $\Phi(w)$ истинно для начального элемента w_* множества W, и для каждого $w \in W$ истинность утверждения $\Phi(x)$ при всех $x < w$ влечёт за собою истинность утверждения $\Phi(w)$, то $\Phi(w)$ истинно для всех $w \in W$.

Упражнение 0.16. Убедитесь в этом.

Такой способ доказательства утверждения $\Phi(w)$ для всех $w \in W$ называется *трансфинитной индукцией*. Используемые для индуктивного перехода подмножества, состоящие из всех элементов, предшествующих данному элементу w, называются *начальными интервалами* частично упорядоченного множества W и обозначаются

$$[w) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in W \mid x < w\}\,.$$

Элемент $w \in W$ называется *точной верхней гранью* начального интервала $[w) \subset W$ и однозначно восстанавливается по интервалу $[w)$ как начальный элемент множества $W \smallsetminus [w)$. Отметим, что начальный элемент $w_* \in W$ является точной верхней гранью пустого начального интервала $[w_*) = \varnothing$.

Упражнение 0.17. Покажите, что собственное подмножество $I \subsetneq W$ тогда и только тогда является начальным интервалом вполне упорядоченного множества W, когда $[x) \subset I$ для каждого $x \in I$, и в этом случае точная верхняя грань интервала I однозначно восстанавливается по I как начальный элемент дополнения $W \smallsetminus I$.

Между вполне упорядоченными множествами имеется отношение порядка $U \leqslant W$, означающее, что U можно биективно и с сохранением порядка отобразить на W или на какой-нибудь начальный интервал $[w) \subset W$. Если при этом U и W не изоморфны, мы пишем $U < W$. Хорошим упражнением на трансфинитную индукцию является

Упражнение 0.18. Убедитесь, что для любой пары вполне упорядоченных множеств U, W выполнено ровно одно из соотношений: или $U < W$, или $U \simeq W$, или $W < U$.

Классы изоморфных вполне упорядоченных множеств называют *ординалами*. Множество $\mathbb{N}$ со стандартным порядком можно воспринимать как множество всех конечных ординалов. Все остальные ординалы, включая $\mathbb{N}$, называются *трансфинитными*.

0.9. Лемма Цорна. Рассмотрим произвольное частично упорядоченное множество P и обозначим через $\mathcal{W}(P)$ множество всех подмножеств $W \subset P$, которые вполне упорядочены имеющимся на P отношением $x \leqslant y$. Множество $\mathcal{W}(P)$ непусто и содержит пустое подмножество $\varnothing \subset P$, а также все конечные цепи[1] $C \subset P$, в частности, все элементы множества P.

Лемма 0.2
Не существует такого отображения $\varrho : \mathcal{W}(P) \to P$, что $\varrho(W) > w$ для всех $W \in \mathcal{W}(P)$ и $w \in W$.

Доказательство. Пусть такое отображение ϱ существует. Назовём вполне упорядоченное подмножество $W \subset P$ рекурсивным, если $\varrho([w)) = w$ для всех $w \in W$. Например, подмножество

$$\Big\{\varrho(\varnothing),\ \varrho\big(\{\varrho(\varnothing)\}\big),\ \varrho\big(\big\{\varrho(\varnothing),\ \varrho(\{\varrho(\varnothing)\})\big\}\big),\ \dots\Big\}$$

рекурсивно и его можно расширять дальше вправо, пока P не исчерпается, что противоречит наложенному на ϱ условию. Уточним сказанное. Если два рекурсивных вполне упорядоченных подмножества имеют общий начальный элемент, то либо они совпадают, либо одно из них является начальным интервалом другого.

Упражнение 0.19. Докажите это.

Обозначим через $U \subset P$ объединение всех рекурсивных вполне упорядоченных подмножеств в P с начальным элементом $\varrho(\varnothing)$.

Упражнение 0.20. Убедитесь, что подмножество $U \subset P$ вполне упорядочено и рекурсивно.

Поскольку элемент $\varrho(U)$ строго больше всех элементов из U, он не лежит в U. С другой стороны, множество $W = U \cup \{\varrho(U)\}$ вполне упорядочено, рекурсивно, и его начальным элементом является $\varrho(\varnothing)$. Следовательно, $W \subset U$, откуда $\varrho(U) \in U$. Противоречие. $\square$

Предложение 0.5
Если каждое вполне упорядоченное подмножество чума P имеет верхнюю грань[2], то в P есть максимальный элемент[3] (возможно не единственный).

Доказательство. Если максимального элемента нет, то для любого $p \in P$ имеется такой элемент $p' \in P$, что $p < p'$. Тогда для каждого вполне упорядоченного подмножества $W \subset P$ найдётся такой элемент $w^* \in P$, что $w < w^*$ для всех $w \in W$. Сопоставляя каждому $W \in \mathcal{W}$ один[4] из таких элементов w^*, мы получаем отображение $\varrho : \mathcal{W} \to P$, которого не может быть по лем. 0.2. $\square$

Определение 0.3 (полные чумы)
Частично упорядоченное множество называется *полным*, если каждая его цепь имеет верхнюю грань.

[1]Т. е. конечные линейно упорядоченные подмножества.

[2]Т. е. для любого вполне упорядоченного $W \subset P$ найдётся такой $p \in P$, что $w \leqslant p$ для всех $w \in W$.

[3]Т. е. такой $p^* \in P$, что неравенство $p^* \leqslant x$ выполняется в P только для $x = p^*$, см. последние два абзаца перед n° 0.8 на стр. 19.

[4]Для этого придётся воспользоваться аксиомой выбора из n° 0.5.1 на стр. 15.

Следствие 0.1 (лемма Цорна)
В каждом полном чуме есть максимальный элемент (возможно не единственный). □

Упражнение 0.21 (лемма Бурбаки – Витта о неподвижной точке). Пусть отображение из полного чума в себя $f\colon P \to P$ таково, что $f(x) \geqslant x$ для всех $x \in P$. Покажите, что существует такое $p \in P$, что $f(p) = p$.

Упражнение 0.22 (теорема Цермелло). Докажите, что каждое множество можно вполне упорядочить.

Упражнение 0.23 (теорема Хаусдорфа о максимальной цепи). Докажите, что в любом чуме каждая цепь содержится в некоторой максимальной по включению цепи.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 0.1. Ответ: 2^n.

Упр. 0.2. Ответ на второй вопрос — нет. Пусть $X = \{1, 2\}$, $Y = \{2\}$. Все их парные пересечения и объединения суть $X \cap Y = Y \cap Y = Y \cup Y = Y$ и $X \cup Y = X \cup X = X \cap X = X$, и любая формула, составленная из $X, Y, \cap, \cup$, даст на выходе или $X = \{1, 2\}$, или $Y = \{2\}$, тогда как $X \smallsetminus Y = \{1\}$.

Упр. 0.3. В первом случае имеется 6 наложений и ни одного вложения, во втором — 6 вложений и ни одного наложения.

Упр. 0.5. Если X конечно, то инъективное или сюрьективное отображение $X \to X$ автоматически биективно. Если X бесконечно, то в X есть подмножество, изоморфное $\mathbb{N}$. Инъекция $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{N}$, $n \mapsto (n + 1)$, и сюрьекция $\mathbb{N} \twoheadrightarrow \mathbb{N}$, $n \mapsto \max(1, (n - 1))$, обе не биективны и продолжаются до точно таких же отображений $X \to X$ тождественным действием на $X \smallsetminus \mathbb{N}$.

Упр. 0.6. Ответ: нет. Воспользуйтесь «диагональным трюком» Кантора: пусть все биекции $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ занумерованы натуральными числами; глядя на этот список, постройте биекцию, которая при каждом $k = 1, 2, 3, \dots$ отображает некоторое число $n_k \in \mathbb{N}$ не туда, куда его отображает k-тая биекция из списка.

Упр. 0.7. Ответ: $\binom{n+m-1}{m-1} = \binom{n+m-1}{n} = \frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!}$. Указание: слагаемых столько же, сколько имеется упорядоченных наборов неотрицательных целых чисел $(k_1, \dots, k_m)$ с суммой $\sum k_i = n$. Такой набор можно закодировать словом, составленным из $(m - 1)$ букв 0 и n букв 1: сначала пишем k_1 единиц, потом нуль, потом k_2 единиц, потом нуль, и т. д. (слово кончится k_m единицами, стоящими следом за последним, $(m - 1)$-м нулём) .

Упр. 0.8. Ответ: $\binom{n+k}{k}$. Каждая такая диаграмма представляет собою ломаную, ведущую из левого нижнего угла прямоугольника в правый верхний. В такой ломаной ровно n горизонтальных звеньев и ровно k вертикальных.

Упр. 0.9. Пусть $[x']_n = [x]_n$ и $[y']_n = [y]_n$, т. е. $x' = x + nk$, $y' = y + n\ell$ с некоторыми $k, \ell \in \mathbb{Z}$. Тогда $x' + y' = x + y + n(k + \ell)$ и $x'y' = xy + n(\ell x + ky + k\ell n)$ сравнимы по модулю n с $x + y$ и xy соответственно, т. е. $[x' + y']_n = [x + y]_n$ и $[x'y']_n = [xy]_n$.

Упр. 0.10. Положим $x \sim y$, если существует конечная последовательность точек

$$x = z_0,\ z_1,\ z_2,\ \dots,\ z_n = y$$

как в условии задачи. Проверьте, что это отношение эквивалентности и что оно содержится в любой эквивалентности $S \subset X \times X$, содержащей R.

Упр. 0.11. Рефлексивность и симметричность очевидны. Транзитивность: если $(p, q) \sim (r, s)$ и $(r, s) \sim (u, w)$, т. е. $ps - rq = 0 = us - rw$, то $psw - rqw = 0 = usq - rwq$, откуда $s(pw - uq) = 0$, и $pw = uq$, т. е. $(p, q) \sim (u, w)$.

Упр. 0.12. Если прямые ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются в точке O под углом $0 < \alpha \leqslant \pi/2$, то отражение относительно ℓ_1, за которым следует отражение относительно ℓ_2, это поворот вокруг точки O на угол 2α в направлении от первой прямой ко второй. Таким образом, отражения относительно пересекающихся прямых коммутируют тогда и только тогда, когда прямые перпендикулярны.

Упр. 0.14. Таблица композиций gf в симметрической группе S_3:

$g \diagdown f$	(1, 2, 3)	(1, 3, 2)	(3, 2, 1)	(2, 1, 3)	(2, 3, 1)	(3, 1, 2)
(1, 2, 3)	(1, 2, 3)	(1, 3, 2)	(3, 2, 1)	(2, 1, 3)	(2, 3, 1)	(3, 1, 2)
(1, 3, 2)	(1, 3, 2)	(1, 2, 3)	(3, 1, 2)	(2, 3, 1)	(2, 1, 3)	(3, 2, 1)
(3, 2, 1)	(3, 2, 1)	(2, 3, 1)	(1, 2, 3)	(3, 1, 2)	(1, 3, 2)	(2, 1, 3)
(2, 1, 3)	(2, 1, 3)	(3, 1, 2)	(2, 3, 1)	(1, 2, 3)	(3, 2, 1)	(1, 3, 2)
(2, 3, 1)	(2, 3, 1)	(3, 2, 1)	(2, 1, 3)	(1, 3, 2)	(3, 1, 2)	(1, 2, 3)
(3, 1, 2)	(3, 1, 2)	(2, 1, 3)	(1, 3, 2)	(3, 2, 1)	(1, 2, 3)	(2, 3, 1)

Упр. 0.15. Отношение $n \mid m$ на множестве $\mathbb{Z}$ не кососимметрично: $n \mid m$ и $m \mid n$ если и только если $|m| = |n| \neq 0$. Фактор множества $\mathbb{Z}$ по этому отношению эквивалентности можно отождествить с множеством $\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ неотрицательных целых чисел, на котором отношение $n \mid m$ является частичным порядком (обратите внимание, что нуль является нижней гранью этого множества, т. е. делит все элементы.)

Упр. 0.16. Пусть множество $S \subset W$ состоит из всех таких элементов $z \in W$, что утверждение $\Phi(z)$ ложно. Если $S \neq \varnothing$, то в нём есть начальный элемент $s_* \in S$. Поскольку утверждение $\Phi(w)$ истинно для всех $w < s_*$, утверждение $\Psi(s_*)$ тоже истинно, т. е. $s_* \notin S$. Противоречие.

Упр. 0.17. Обозначим через x_I начальный элемент дополнения $W \smallsetminus I$. Начальный интервал $[x_I) \subset W$ является объединением начальных интервалов $[y) \subset W$ по всем $y < x$. Так как I содержит все интервалы $[y)$ с $y < x_I$, мы заключаем, что $I \supseteq [x_I)$, откуда $I = [x_I)$.

Упр. 0.18. Пусть соотношение $U \geqslant W$ не выполняется. Покажем, что любой начальный отрезок $[u) \subset U$ изоморфен некоторому начальному отрезку $[w) \subset W$, где $w = w(u)$ однозначно восстанавливается по u. Это верно для пустого начального отрезка $\varnothing = [u_*]$, где $u_* \in U$ — минимальный элемент. Пусть это верно для всех начальных отрезков $[y) \subset U$ с $y < u$. Тогда $[y) = \bigcup_{y<u}[y)$ изоморфен объединению вложенных отрезков $\bigcup_{y<u}[w(y)) \subset W$. Если это объединение исчерпывает всё множество W, то $W \simeq [y)$, т. е. $W \leqslant U$ вопреки предположению. Положим $w(u) \in W$ равным минимальному элементу, не содержащемуся в $\bigcup_{y<u}[w(y))$. Проверьте, что $\bigcup_{y<u}[w(y)) = [w(u))$ и что отображение $u \mapsto w(u)$ устанавливает изоморфизм множества U либо со всем множеством W, либо с некоторым его начальным отрезком.

Упр. 0.19. Пусть рекурсивные подмножества $W_1, W_2 \subset P$ имеют общий начальный элемент. Рассмотрим подмножество $Z \subseteq W_1$, состоящее из всех таких $z \in W_1$, что начальный интервал $[z)_1$ в множестве W_1 совпадает с начальным интервалом $[z)_2$ в множестве W_2. Множество Z не пусто, поскольку содержит общий начальный элемент множеств W_1 и W_2, и в силу рекурсивности W_1 и W_2 содержится в $W_1 \cap W_2$, являясь начальным интервалом как в W_1, так и в W_2 по упр. 0.17 на стр. 19. Если $Z \neq W_1$ и $Z \neq W_2$, то точные верхние грани Z в W_1 и W_2, с одной стороны, не лежат в Z и поэтому различны, а с другой стороны обе равны $\varrho(Z)$ в силу рекурсивности W_1 и W_2. Тем самым, $Z = W_1$ или $Z = W_2$.

Упр. 0.20. Каждое подмножество $S \subset U$ имеет непустое пересечение с каким-нибудь рекурсивным вполне упорядоченным подмножеством $W \subset P$ с начальным элементом $\varrho(\varnothing)$. По упр. 0.19 подмножество W является начальным интервалом всех содержащих W рекурсивных вполне упорядоченных подмножеств с начальным элементом $\varrho(\varnothing)$. Поэтому начальный элемент пересечения $S \cap W$ не зависит от выбора W с $W \cap S \neq \varnothing$ и является начальным элементом подмножества S. Каждый начальный интервал $[u) \subset U$ является начальным интервалом любого содержащего u множества W из цепи. В силу рекурсивности W элемент $\varrho[u) = u$.

Упр. 0.21. Пользуясь аксиомой выбора, зафиксируем для каждого $W \in \mathcal{W}(P)$ какую-нибудь верхнюю грань $b(W) \in P$. Если $f(x) > x$ для всех $x \in P$, то отображение $\beta : \mathcal{W}(P) \to P, W \mapsto f(b(W))$ противоречит лем. 0.2 на стр. 20.

Упр. 0.22. Обозначим через $\mathcal{S}(X)$ множество всех непустых подмножеств данного множества X, включая само X. При помощи аксиомы выбора постройте такое отображение $\mu : \mathcal{S}(X) \to X$, что $\mu(Z) \in Z$ для всех $Z \in \mathcal{S}(X)$. Обозначим через $\mathcal{W}(X)$ множество всех $W \in \mathcal{S}(X)$, которые можно вполне упорядочить так, что $\mu(X \smallsetminus [w)) = w$ для всех $w \in W$. Вдохновляясь лем. 0.2 на стр. 20 покажите, что $\mathcal{W}(X) \neq \varnothing$, и убедитесь, что $X \in \mathcal{W}(X)$.

Упр. 0.23. Убедитесь, что множество всех цепей, содержащих данную цепь, является полным чумом относительно отношения включения, и примените лемму Цорна.