

Задачи для подготовки к контрольной № 2

ПК2♦1. В $\mathbb{F}_3[x]$ разложите на неприводимые множители или докажите неприводимость многочленов а) $x^5 + x^4 - x^2 - x - 1$ б) $x^5 - x^4 - x^3 - x^2 + 1$ в) $x^5 - x^4 - x^3 - x + 1$.

ОТВЕТ: в (а) $x^5 + x^4 - x^2 - x - 1 = (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 - x - 1)$; в (б) и (в) неприводимы. Неприводимы в \mathbb{F}_3 многочлены $x^2 + x + 1$, $x^3 - x^2 - x - 1$, $x^3 - x^2 - x + 1$, $x^3 - x^2 - x - 1$, $x^3 - x^2 - x + 1$.

ПК2♦2. Разложите в сумму простейших дробей над полем \mathbb{Q} рациональные функции:

а) $\frac{x^3 - x^2 + 6x + 4}{x^4 + 2x^3 - 11x^2 - 12x + 36}$ б) $\frac{x^3 + 9x^2 + 6x + 8}{x^4 - 10x^3 + 36x^2 - 56x + 32}$
 в) $\frac{x^3 - 9x^2 - 6x + 6}{x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 108x + 81}$.

ОТВЕТ: в (а) $\frac{19}{25} + \frac{x+3}{2} - \frac{x-2}{6/25} + \frac{x-2}{4/5}$; в (б) $-\frac{x-2}{29} - \frac{x-2}{43} - \frac{x-2}{32} + \frac{x-4}{30}$; в (в) $\frac{x-3}{66} - \frac{x-3}{33} - \frac{x-3}{1} + \frac{x-4}{30}$.

ПК2♦3. Найдите коэффициент при x^k у следующих рядов из $\mathbb{Q}[[x]]$:

а) $\frac{-8x^2 - 5x + 1}{x^3 - 10x^2 + 32x - 32}$ б) $\frac{-8x^2 + 3x + 7}{x^3 - x^2 - x + 1}$ в) $\frac{x^2 - 4x + 2}{x^3 + 6x^2 + 9x + 4}$.

ОТВЕТ: в (а) разложение на простейшие дроби: $-\frac{4}{165} + \frac{1}{15} + \frac{1}{11} - \frac{1}{5}$; в (б) разложение на простейшие дроби: $\frac{1}{7} + \frac{x-1}{2} - \frac{x-1}{3}$; в (в) разложение на простейшие дроби: $\frac{3}{4} - \frac{9}{25} + \frac{9(x+4)}{25}$.

ПК2♦4. Явно выразите a_k через k для следующих последовательностей:

- а) $a_0 = -5, a_1 = 1, a_2 = -21, a_k = 3a_{k-2} + 2a_{k-3}$ при $k \geq 3$
- б) $a_0 = 3, a_1 = 25, a_2 = 130, a_k = 6a_{k-1} - 9a_{k-2} + 4a_{k-3}$ при $k \geq 3$
- в) $a_0 = -9, a_1 = -1, a_2 = -78, a_k = a_{k-1} + 8a_{k-2} - 12a_{k-3}$ при $k \geq 3$.

ОТВЕТ: в (а) производящая функция: $\frac{-6x^2+x-5}{x^3-3x^2+x+1}$; разложение на простейшие дроби: $\frac{1}{4} - \frac{2x-1}{5/3} + \frac{2x-1}{8/3}$; $a_k = \frac{1}{4} - \frac{2x-1}{5/3} + \frac{2x-1}{8/3}$; в (б) производящая функция: $\frac{-4x^3+9x^2-6x+1}{7x^2+7x+3}$; разложение на простейшие дроби: $-\frac{2}{3} + (-1)^k(12k+7)/3$; в (в) производящая функция: $\frac{1}{2x^3-8x^2-x+1}$; разложение на простейшие дроби: $-\frac{8}{9} + \frac{1}{17/3} - \frac{1}{56} + \frac{1}{17/3} - \frac{1}{56} + \frac{1}{17/3}$.

ПК2♦5. Вычислите коэффициенты при x^k для всех $0 \leq k \leq 3$ у степенных рядов

а) $\frac{\text{ch}(-4x^2 + 2x)}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$ б) $\frac{\ln(-3x^2 + 3x + 1)}{\sqrt[3]{-x^2 - 4x + 1}}$ в) $\frac{\sin(4x^2 - 4x)}{\sqrt{4x^2 + 2x + 1}}$.

ОТВЕТ: в (а) $\text{ch}(-4x^2 + 2x) = 1 + 2x^2 - 8x^3 + O(x^4)$; $\sqrt{x^2 + x + 1} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + O(x^4)$; $\frac{\text{ch}(-4x^2 + 2x)}{\sqrt{x^2 + x + 1}} = 1 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^3 + O(x^4)$; в (б) $\ln(-3x^2 + 3x + 1) = 1 - \frac{3}{2}x^2 + 3x^3 + O(x^4)$; $\sqrt[3]{-x^2 - 4x + 1} = 1 - \frac{4}{3}x + \frac{16}{27}x^2 - \frac{64}{27}x^3 + O(x^4)$; $\frac{\ln(-3x^2 + 3x + 1)}{\sqrt[3]{-x^2 - 4x + 1}} = 1 + \frac{4}{3}x - \frac{16}{27}x^2 + \frac{64}{27}x^3 + O(x^4)$; в (в) $\sin(4x^2 - 4x) = -4x + 4x^2 - 4x^3 + O(x^4)$; $\sqrt{4x^2 + 2x + 1} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + O(x^4)$; $\frac{\sin(4x^2 - 4x)}{\sqrt{4x^2 + 2x + 1}} = -4x + \frac{7}{2}x^2 - \frac{11}{4}x^3 + O(x^4)$.