

Задачи для подготовки к контрольной № 1

ПК1♦1. Найдите наименьшее по модулю целое число с остатками

- а) 51, 5, 12 от деления на 91, 51, 23 б) 61, 64, 24 от деления на 85, 143, 37.

ОТВЕТ: в (а) 30809, в (б) -9374.

ПК1♦2. Найдите все целые решения уравнения

- а) $143x + 15y + 29z = -12$ б) $187x + 35y + 41z = 10$
 в) $377x + 1247y = 58$ г) $1333x + 403y = -93$.

ОТВЕТ: в (а) $(t_0, -257t_0 + 29t_1 - 24, 128t_0 - 15t_1 + 12)$, в (б) $(t_0, 1350t_0 + 41t_1 - 70, -1157t_0 - 35t_1 + 60)$, в (в) $(t_0, 1350t_0 + 41t_1 - 70, -1157t_0 - 35t_1 + 60)$, в (г) $(t_0, 1350t_0 + 41t_1 - 70, -1157t_0 - 35t_1 + 60)$.

ПК1♦3. Решите уравнение: а) $x^2 = 71$ в $\mathbb{Z}/(145)$ б) $x^2 = 16$ в $\mathbb{Z}/(205)$

ОТВЕТ: в (а) $\{145 = 5 \cdot 29, [129] = (4, 13), (1, 0) = [-29], (0, 1) = [30], (\pm 3, \pm 19) = \{48, 68, 77, 97\}, \{98, 111\} = \{4, 19, 4, 20, 101, 86\}$.

ПК1♦4. Выясните, является ли кольцо $\mathbb{Q}[x]/(x^3 + x^2 + 3x + 1)$ полем, и найдите в нём элемент $[x^2 + 2x + 2]^{-1}$, если таковой существует.

ОТВЕТ: $1 = (x^3 + x^2 + 3x + 1) \cdot (-\frac{x}{1} - \frac{x}{2}) + (x^2 + 2x + 2) \cdot (\frac{x}{2} + \frac{x}{2})$, $[\frac{x}{2} + \frac{x}{2}] = [x^2 + 2x + 2]^{-1}$.

ПК1♦5. Выясните, является ли кольцо $\mathbb{Q}[x]/(x^3 + 4x + 1)$ полем, и найдите в нём элемент $[x^2 + 3x]^{-1}$, если таковой существует.

ОТВЕТ: $1 = (x^3 + 4x + 1) \cdot (\frac{8x}{13x} + 1) + (x^2 + 3x) \cdot (-\frac{8x}{13x} + \frac{8x}{x} + \frac{8x}{13x})$, $[\frac{8x}{13x} + \frac{8x}{x} + \frac{8x}{13x}] = [x^2 + 3x]^{-1}$.

ПК1♦6. Кубический полином $f \in \mathbb{Q}[x]$ принимает значения

$$f(3) = 120, \quad f(-2) = 0, \quad f(-5) = 216, \quad f(-3) = 0.$$

Найдите остаток от деления f на $x^2 + 1$.

ОТВЕТ: $f = -4x^3 - 4x^2 + 56x + 96 \equiv 60x + 100 \pmod{x^2 + 1}$.

ПК1♦7. Кубический полином $f \in \mathbb{Q}[x]$ принимает значения

$$f(-2) = -4, \quad f(-5) = -16, \quad f(-3) = 0, \quad f(-4) = 0.$$

Найдите остаток от деления f на $x^2 - x + 1$.

ОТВЕТ: $f = 2x^3 + 16x^2 + 38x + 24 \equiv 54x + 24 \pmod{x^2 - x + 1}$.

ПК1♦8. Найдите все общие комплексные корни многочленов

- а) $x^4 - 11x^3 + 54x^2 - 152x + 160$ и $x^4 - 7x^3 + 64x - 448$
 б) $x^4 - 4x^3 - 13x^2 - 122x - 240$ и $x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 93x + 90$.

ОТВЕТ: в (а) $\sqrt[3]{3i}, 2 + 2\sqrt[3]{3i}$, его корни $2 - 2\sqrt[3]{3i}, 2 + 2\sqrt[3]{3i}$, в (б) $\sqrt[4]{14i}, -1 + \sqrt[4]{14i}$, его корни $\sqrt[4]{14i}, -1 + \sqrt[4]{14i}$.

ПК1♦9. Найдите вещественные и мнимые части всех комплексных корней многочлена

- а) $x^2 + (-12 + 13ix) + (23 - 89i)$ б) $x^2 + (-7 + 11ix) + (22 - 19i)$.

ОТВЕТ: в (а) дискриминант $-17 + 44i$, корни $7 - i, 5 - 12i$, в (б) дискриминант $-160 - 78i$, корни $5 - 12i, 2 + i$.