ПРОГРАММА ЭКЗАМЕНА ПО КУРСУ «АЛГЕБРА – I»
ЗА ВЕСЕННИЙ СЕМЕСТР 2022/23 УЧЕБНОГО ГОДА

ТЕМА 1. Классификация конечномерных пространств с оператором над произвольным полем, жорданова и фробениусова нормальные формы. Элементарные делители, характеристический и минимальный многочлены. Характеризация нильпотентных, полупростых, циклических и диагонализуемых операторов. Свойства коммутирующих операторов. Корневое разложение и вычисление функций от операторов.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: находить элементарные делители, характеристический и минимальный многочлены, жорданову и фробениусову нормальные формы, собственные числа и собственные подпространства оператора над любым полем, определять цикловой тип нильпотентного оператора, выяснять наличие циклического вектора, диагонализуемость, полупростоту, нильпотентность и цикловой тип нильпотентного оператора, вычислять аналитические в окрестности спектра функции от матриц и операторов (в частности, произвольные степени и экспоненту любой матрицы, а также корни и логарифмы невырожденных матриц) при помощи полиномиальной интерполяции.

ТЕМА 2. Группы и гомоморфизмы групп, непустые слои гомоморфизма являются смежными классами ядра. Циклические подгруппы и порядки элементов. Симметрические и знакопеременные группы: цикловой тип, длина и знак перестановки, классы сопряжённости, централизатор перестановки данного циклового типа. Группы многогранников. Линейные и проективные группы над конечными полями. Действие группы на множестве: транспортёры, стабилизаторы, нормализаторы и централизаторы, формулы для длины орбиты и числа орбит. Действие группы на себе: классы смежности и сопряжённости. Нормальные подгруппы и фактор группы.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: находить длину орбиты и число орбит действия конечной группы на конечном множестве, пользоваться свойствами гомоморфизмов, подгрупп, смежных классов, порядков элементов при решении комбинаторных задач с действием группы, вычислять знак, цикловой тип, порядок, централизатор и степени заданной перестановки, вычислять композиции перестановок, исследовать подгруппы на нормальность.

ТЕМА 3. Коммутаторы и коммутант. Простые группы, простота групп A_n и $\mathrm{PSL}_n\,\mathbb{F}_q$. Композиционные ряды, теорема Жордана – Гёльдера. Прямые и полупрямые произведения групп. Свойства p-групп и теоремы Силова. Свободные группы. Задание групп образующими и соотношениями.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: вычислять коммутанты групп S_n, A_n, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)$, $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{F}_q)$, описывать группы порядков pq, перечислять группы порядка $\leqslant 15$, использовать свойства p-групп, теоремы Силова и композиционные факторы для анализа строения конечных групп, использовать образующие и соотношения для описания гомоморфизмов групп, задавать образующими и соотношениями симметрическую группу и группы трёхмерных многогранников (включая диэдры).

ТЕМА 4. Полилинейные отображения и тензорные произведения модулей над кольцом (конструкция и универсальное свойство), тензорное произведение линейных отображений. Канонические изоморфизмы коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности. Базис тензорного произведения свободных модулей, образующие и соотношения тензорного произведения модулей, заданных образующими и соотношениями.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: пользоваться универсальным свойством тензорного произведения, задавать линейные отображения между тензорными произведениями указанием их значений на разложимых тензорах, вычислять тензорные произведения абелевых групп и примитивных расширений полей.

ТЕМА 5. Тензорные произведения и тензорные степени векторных пространств. Разложимые тензоры и многообразия Сегре. Линейные операторы и полилинейные формы как тензоры. Свёртки, двойственность между тензорными степенями двойственных пространств. Линейный носитель тензора. Тензорная алгебра векторного пространства, её универсальное свойство.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: вычислять свёртки и линейные носители тензоров, исследовать тензор на разложимость, понимать, как действуют свёртки на языке полилинейных форм и линейных отображений.

ТЕМА 6. Симметрические и внешние степени векторного пространства, симметрическая и внешняя алгебра. Симметрические и знакопеременные тензоры. Поляризация многочленов (обычных и грассмановых), частные производные и двойственность между симметрическими и внешними алгебрами двойственных пространств над полем характеристики нуль. Многочлены с минимальным линейным носителем, многообразия Веронезе и Грассмана.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: вычислять размерности симметрических и внешних степеней, вычислять поляризации обычных и грассмановых многочленов, пользоваться формулой Тейлора и принципом Аронгольда при анализе линейных утверждений про (обычные) многочлены, вычислять размерность линейного носителя многочлена (обычного и грассманова), выяснять, разложим ли грассманов многочлен.

ТЕМА 7. Овеществление комплексного векторного пространства, сравнение вещественной и комплексной линейности, соотношения Коши – Римана. Комплексификация вещественных векторных пространств и линейных отображений, вещественный геометрический смысл комплексных собственных векторов, билинейное и полуторалинейное продолжение вещественной билинейной формы на комплексификацию. Комплексные и вещественные структуры, геометрическое описание комплексных структур. Эрмитовы структуры и кэлеровы тройки, описание кэлеровых троек, продолжающих заданную симплектическую и заданную евклидову структуру до эрмитовой.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: выяснять, является ли $\mathbb{R}$-линейный оператор $\mathbb{C}$-линейным, понимать, что происходит с собственными векторами, собственными и корневыми подпространствами и элементарными делителями линейных операторов при комплексификации и овеществлении, понимать, как устроены собственные подпространства комплексной и вещественной структуры, и как эти собственные подпространства получаются друг из друга, находить третий элемент кэлеровой тройки по двум другим и выяснять, дополняются ли два потенциальных элемента кэлеровой тройки до эрмитовой структуры.

ТЕМА 8. Эрмитова геометрия: длина вектора, эрмитова структура однозначно восстанавливается по функции длины, неравенства КБШ и треугольника, матрицы Грама и ортогонализация Грама – Шмидта, ортогональное дополнение и ортогональная проекция, эрмитов угол между комплексными прямыми, унитарная группа. Эрмитово сопряжение линейных отображений, эрмитовы и антиэрмитовы операторы, ортогональная диагонализация нормальных операторов, нормальные формы унитарных и (анти)эрмитовых операторов, полярное разложение обратимого оператора. Эрмитово продолжение евклидовой структуры, канонический вид евклидово (анти)самосопряжённых и ортогональных операторов.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: вычислять длины, углы и ортогональные проекции в эрмитовом пространстве, находить эрмитово двойственный базис к данному, выяснять, нормален ли оператор, и приводить нормальные (в том числе унитарные и (анти)эрмитовы) операторы к нормальным осям, вычислять компоненты полярного разложения невырожденного оператора, приводить к нормальным осям в евклидовом пространстве ортогональные и евклидово (анти)самосопряжённые и ортогональные операторы.

ТЕМА 9. Тело $\mathbb{H}$: умножение, норма, сопряжение, геометрическое описание умножения чисто мнимых кватернионов. Универсальные накрытия $\mathrm{SU}_2 \twoheadrightarrow \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ и $\mathrm{SU}_2 \times \mathrm{SU}_2 \twoheadrightarrow \mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$, геометрическое описание трёхмерных вращений и алгебраическое описание четырёхмерных отражений, задаваемых унитарными кватернионами. Бинарные группы трёхмерных правильных многогранников как четырёхмерные группы отражений. Два семейства эрмитовых структур на $\mathbb{H}$, расслоение Хопфа $S^3 \twoheadrightarrow S^2$.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: свободно вычислять с кватернионами (умножать, находить обратные, решать уравнения), выписывать ортогональные матрицы, которыми действуют унитарные кватернионы, и находить оси и углы соответствующих вращений, понимать, из каких кватернионов состоят бинарные группы тетраэдра, октаэдра и икосаэдра, задавать расслоение Хопфа явной формулой.