## ПРОГРАММА ЭКЗАМЕНА ПО КУРСУ «АЛГЕБРА – I»

## ЗА ОСЕННИЙ СЕМЕСТР 2022/23 УЧЕБНОГО ГОДА

ТЕМА 1. Определение поля, коммутативного кольца и абелевой группы. Аддитивная и мультипликативная группы поля. Прямые произведения абелевых групп и колец. Взаимная простота, свойства взаимно простых элементов. Кольцо $\mathbb{Z}$: делимость, НОД и НОК, алгоритм Евклида – Гаусса, факториальность. Кольца и поля вычетов $\mathbb{Z}/(n)$: делители нуля, нильпотенты, обратимые вычеты, теорема Эйлера, малая теорема Ферма, китайская теорема об остатках. Свойства гомоморфизмов абелевых групп, колец и полей; примеры: квадраты в поле $\mathbb{F}_p$, простое подполе, характеристика, гомоморфизм Фробениуса.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: находить НОД и НОК данных целых чисел и их линейные выражения через эти числа, решать линейные диофантовы уравнения, находить целые степени элементов в $\mathbb{Z}/(n)$ (включая обратные), находить числа с предписанными остатками, выяснять, является ли $-1$ и $2$ квадратом в $\mathbb{Z}/(p)$, решать линейные уравнения в $\mathbb{Z}/(n)$, пользоваться свойствами гомоморфизмов и тем, что $x \mapsto x^p$ является аддитивным гомоморфизмом в целостных кольцах характеристики $p$.

ТЕМА 2. Кольца многочленов и формальных степенных рядов. Алгебраические операции над рядами, примеры: замена переменной, обращение ряда с обратимым свободным членом. Дифференциальное исчисление рядов и многочленов. Деление многочленов с остатком, китайская теорема об остатках в кольце многочленов с коэффициентами в поле. Корни и кратные корни многочленов, интерполяционный многочлен Лагранжа. Кольца вычетов $\Bbbk[x]/(f)$ и примитивные расширения полей. Поле комплексных чисел. Описание конечных полей.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: находить НОД и НОК данных многочленов и их линейные выражения через эти многочлены, делить многочлены столбиком, находить многочлены с предписанными остатками, исследовать обратимость элементов в кольцах $\Bbbk[x]/(f)$ и находить обратные, вычислять в конечных полях, выписывать неприводимые многочлены малых степеней над небольшими конечными полями, свободно вычислять в поле $\mathbb{C}$: умножать, делить, возводить в целые степени, сопрягать, решать уравнения вида $z^n = a$ и т. п.

ТЕМА 3. Кольца и поля частных, ряды Лорана, рациональные функции. Разложение рациональной функции на простейшие дроби и в степенной ряд, решение линейных рекуррентных уравнений конечного порядка. Экспонента, логарифм, бином, пример: числа Каталана. Действие $\mathbb{Q}[\![d/dx]\!]$ на $\mathbb{Q}[x]$, суммирование степеней и числа Бернулли. Ряды Пюизо, алгебраическая замкнутость поля дробно степенных рядов над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: раскладывать рациональную функцию на простейшие дроби и в степенной ряд, решать линейные рекуррентные уравнения, раскладывать элементарные функции (тригонометрические, гиперболические, экспоненту, логарифм, бином с произвольным показателем) в степенной ряд и пользоваться этими разложениями для решения комбинаторных задач, вычислять суммы степеней и числа Бернулли.

ТЕМА 4. Идеалы и фактор кольца. Нётеровы кольца, теорема Гильберта о базисе идеала. Простые и максимальные идеалы. Простые и неприводимые элементы кольца. Области главных идеалов, примеры: евклидовы кольца, числа Гаусса и Кронекера. Факториальные кольца, факториальность области главных идеалов, факториальность кольца многочленов над факториальным кольцом, содержание многочлена и лемма Гаусса. Разложение на множители многочленов с целыми коэффициентами, критерии неприводимости.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: пользоваться нётеровостью, свойствами простых и неприводимых элементов, факториальностью; соотносить друг с другом взаимную простоту и отсутствие общих необратимых делителей; раскладывать на простые множители, находить НОД и НОК и делить с остатком в кольцах $\mathbb{Z}[x]/(x^2+1)$ и $\mathbb{Z}[x]/(x^2+x+1)$; приводить примеры нефакториальных колец и непростых неприводимых элементов в таких кольцах; анализировать неприводимость многочленов с целыми и рациональными коэффициентами.

ТЕМА 5. Модули над коммутативными кольцами: подмодули, фактор модули, дополнительные подмодули и неразложимость, модули гомоморфизмов. Ранг свободного модуля. Задание модулей образующими и соотношениями, модуль гомоморфизмов между модулями, заданными образующими и соотношениями, пример: $\mathrm{Hom}\big(\mathbb{Z}/(n), \mathbb{Z}/(m)\big)$. Ассоциативные алгебры над коммутативными кольцами, алгебра эндоморфизмов модуля, алгебра матриц, обратимые элементы, примеры: обратимые матрицы $2\times 2$, обращение унитреугольной матрицы и теорема об элементарных симметрических функциях. Матричный формализм: умножение матриц, как преобразуются строки/столбцы матрицы при умножении слева/справа на заданную матрицу, матрицы переходов, матрицы гомоморфизмов.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: свободно вычислять с матрицами: выписывать матрицы переходов и матрицы гомоморфизмов, выписывать матрицу, умножение на которую производит заданное линейное преобразование строк/столбцов заданной матрицы, вычислять матрицы, обратные к унитреугольным, а также степени нильпотентных и унипотентных матриц; вычислять фактор модули и модули гомоморфизмов между модулями, заданными образующими и соотношениями; представлять заданную симметрическую функцию в виде многочлена от элементарных симметрических функций и пользоваться этим.

ТЕМА 6. Преобразования пары строк/столбцов матрицы, задаваемые их левым/правым умножением на обратимые $2 \times 2$-матрицы. Метод Гаусса над областью главных идеалов: приведение матрицы к нормальной форме Смита и его применения для решения систем линейных уравнений, отыскания обратной матрицы, отыскания инвариантных множителей и взаимных базисов подмодуля в свободном модуле конечного ранга. Классификация конечно порождённых модулей над кольцом главных идеалов, инвариантные множители и элементарные делители, кручение, $p$-кручение и цикловой тип модуля $p$-кручения.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: приводить целочисленную матрицу к нормальной форме Смита и находить соответствующие матрицы перехода, решать системы линейных диофантовых уравнений, исследовать целочисленные матрицы на обратимость и находить обратные, находить инвариантные иножители и указывать взаимный базис подмодуля в свободном модуле конечного ранга.

ТЕМА 7. Классификация конечно порождённых абелевых групп. Простота и полупростота, разложимость, отщепимость подмодуля прямым слагаемым.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: перечислять абелевы группы заданного порядка; выяснять количество элементов заданного порядка в заданной абелевой группе; анализировать полупростоту, неприводимость и неразложимось; выяснять, отщепляется ли подрешётка в $\mathbb{Z}^n$ прямым слагаемым; находить порядки элементов и выписывать каноническое разложение в прямую сумму неразложимых групп для групп заданных образующими и соотношениями и в факторах решётки $\mathbb{Z}^n$ по подрешётке, заданной системой однородных линейных уравнений.

ТЕМА 8. Алгебра грассмановых многочленов и внешняя алгебра свободного модуля. Знак и длина перестановки, знак тасующей перестановки. Линейная замена переменных в грассмановом многочлене, определитель и миноры, внешняя степень матрицы, мультипликативность внешних степеней. Соотношения Лапласа (разложение определителя по набору строк/столбцов), присоединённая матрица. Матрицы над кольцом многочленов = многочлены с коэффициентами в алгебре матриц, тождество Гамильтона – Кэли. Число элементов в факторе решётки по подрешётке равно объёму фундаментального параллелепипеда, выражение инвариантных множителей матрицы через её миноры.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: вычислять с грассмановыми многочленами, вычислять определители, находить присоединённую и обратную матрицы вычислением алгебраических дополнений, вычислять характеристический многочлен матрицы, вычислять инвариантные множители матрицы через её миноры, вычислять число элементов в факторе решётки по соизмеримой подрешётке через дискриминант подрешётки.