Программа коллоквиума по материалам первых трёх модулей

Сюжет 1. Определение группы, дополнительные свойства единицы и обратных элементов. Образ гомоморфизма групп является подгруппой, а ядро — нормальной подгруппой, равенства $\varphi^{-1}(\varphi(g)) = g\ker(\varphi) = \ker(\varphi)g$. Действие группы G на множестве X, разбиение на орбиты, эффективные, свободные и транзитивные действия, централизаторы и нормализаторы подмножеств в X. Все транспортёры между элементами одной орбиты находятся в биекции друг с другом, стабилизаторы всех элементов одной орбиты сопряжены. Формулы для длины орбиты конечной группы и для числа её орбит на конечном множестве.

Сюжет 2. Циклические подгруппы, порядок элемента группы равен порядку порождённой им циклической подгруппы. Левое и правое действие группы на себе, теорема Лагранжа о смежных классах и индексе подгруппы. Присоединённое действие группы на себе, классы сопряжённости, центр. Нормальные подгруппы и фактор группы. Коммутант и его универсальное свойство. Коммутант группы $\mathrm{SL}_n(\Bbbk)$, где $\Bbbk$ — поле.

Сюжет 3. Группы S_n и A_n. Знак, длина и цикловой тип перестановки. Описание присоединённого действия, класса сопряжённости и централизатора данной перестановки, число элементов в них. Коммутанты S_n' и A_n'. Простота групп A_n с $n \neq 4$.

Сюжет 4. p-группы, критерий существования неподвижной точки действия p-группы на конечном множестве, нетривиальность центра p-группы. Теорема Силова и дополнение к ней. Прямое и полупрямое произведения групп, примеры.

Сюжет 5. Свободная группа. Задание группы образующими и определяющими соотношениями. Образующие и соотношения групп D_n и S_n.

Сюжет 6. Определение коммутативного кольца и поля. Свойства гомоморфизмов, идеалы и фактор кольца, собственный идеал максимален по включению если и только если фактор по нему поле. Нётеровы кольца, нётеровость кольца многочленов над нётеровым кольцом. Свойства взаимно простых элементов коммутативного кольца. Простые и неприводимые элементы, факториальность, нётерово целостное кольцо факториально если и только если каждый его неприводимый элемент прост. Области главных идеалов (ОГИ), каждое евклидово кольцо является ОГИ, все ОГИ факториальны. Мультипликативные подмножества, кольцо частных и его универсальное свойство, поле частных целостного кольца.

Сюжет 7. Деление многочленов с остатком, китайская теорема об остатках в $\Bbbk[x]$, где $\Bbbk$ — поле. Разложение рациональной функции на простейшие дроби. Корни многочленов, кратность корня, интерполяционный многочлен Лагранжа, интерполяция с кратными узлами. Кольца и поля $\Bbbk[x]/(f)$, отыскание обратных элементов. Мультипликативность содержания многочлена над факториальным кольцом, лемма Гаусса, факториальность кольца многочленов над факториальным кольцом. Достаточные условия неприводимости и алгоритм Кронекера для разложения на неприводимые множители в $\mathbb{Z}[x]$.

Сюжет 8. Кольца вычетов $\mathbb{Z}/(n)$: описание обратимых элементов и отыскание обратных, теорема Эйлера, малая теорема Ферма, китайская теорема об остатках. Характеристика поля, гомоморфизм Фробениуса. Всякая конечная подгруппа в мультипликативной группе поля циклическая. Описание конечных полей с точностью до изоморфизма.

Сюжет 9. Кольцо формальных степенных рядов, критерий обратимости ряда, подстановка в ряд ряда без свободного члена, дифференцирование рядов, производные произведения, частного и композиции двух рядов. Поле частных кольца $\Bbbk[\![x]\!]$, где $\Bbbk$ — поле, вложение $\Bbbk(x) \hookrightarrow \Bbbk(\!(x)\!)$ и решение линейных рекуррентных уравнений путём разложения рациональной функции в степенной ряд. Экспоненцирование и логарифмирование рядов над полем характеристики нуль являются взаимно обратными изоморфизмами между аддитивной группой рядов без свободного члена и мультипликативной группой рядов с единичным свободным членом. Биномиальный ряд и формула Ньютона для его коэффициентов.

Сюжет 10. Определение модуля над коммутативным кольцом, подмодули и фактор модули, свойства гомоморфизмов, модуль гомоморфизмов. Прямые суммы модулей и подмодулей, дополнительные подмодули. Определение свободного модуля, ранг свободного модуля, задание модуля образующими и соотношениями. Модуль гомоморфизмов между модулями, заданными образующими и соотношениями.

Сюжет 11. Определение ассоциативной алгебры над коммутативным кольцом, алгебра эндоморфизмов модуля. Алгебра матриц: ассоциативность и дистрибутивность умножения, матрицы переходов и матрицы гомоморфизмов, матричные единицы E_{ij} и их таблица умножения, обратимые матрицы, обращение верхней унитреугольной матрицы, пример: теорема об элементарных симметрических функциях.

Сюжет 12. Определитель матрицы, его полилиненйность, кососимметричность и инвариантность относительно транспонирования. Грассмановы многочлены. Миноры и внешняя степень матрицы, мультипликативность внешних степеней, формула Лапласа для разложения определителя по набору строк или столбцов. Присоединённая матрица, тождество $A\,A^\vee = A^\vee\,A = \det(A)\,E$. Матрицы над кольцом многочленов $=$ многочлены с коэффициентами в алгебре матриц, тождество Гамильтона – Кэли $\chi_A(A) = 0$.

Сюжет 13. Метод Гаусса над ОГИ, приведение матрицы к нормальной форме Смита, независимость (с точностью до умножения на обратимые элементы кольца) диагональных элементов от способа приведения (теорема об инвариантных множителях для матриц), решение систем линейных уравнений и отыскание обратной матрицы методом Гаусса.

Сюжет 14. Теорема о взаимных базисах конечно порождённого свободного модуля над ОГИ и его подмодуля, независимость (с точностью до умножения на обратимые элементы кольца) инвариантных множителей от выбора взаимных базисов (теорема об инвариантных множителях для подмодуля в свободном модуле). Взаимно однозначное соответствие между наборами инвариантных множителей и наборами элементарных делителей. Разложение конечно порождённого модуля над ОГИ K в прямую сумму свободного и модулей вида $K/(p^n)$, где $p \in K$ прост (теорема об элементарных делителях). Свойства подмодулей кручения и p-кручения, цикловой тип модуля p-кручения.

Сюжет 15. Классификация конечно порождённых абелевых групп. Конечно порождённая абелева группа является прямой суммой простых если и только если у любой подгруппы есть дополнительная подгруппа. Описание простых, полупростых и неразложимых абелевых групп. Число элементов в факторе решётки по соизмеримой подрешётке.

Сюжет 16. Классификация конечномерных векторных пространств с линейным оператором над произвольным полем, элементарные делители и их отыскание по матрице оператора, жорданова и фробениусова нормальные формы оператора. Характеристический и минимальный многочлены оператора, их выражение через элементарные делители. Циклический базис и цикловой тип нильпотентного оператора N, отыскание циклового типа по размерностям $\dim\ker N^k$. Собственные числа и собственные подпространства, сумма собственных подпространств прямая. Свойства, характеризующие полупростые, диагонализуемые и циклические операторы. Одновременная диагонализация и общий собственный вектор любого множества коммутирующих операторов. Корневое разложение и вычисление функций от оператора при помощи интерполяционных многочленов, существование $\sqrt{A}$ для $A \in \mathrm{GL}_n(\Bbbk)$, где поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто и $\mathrm{char}\,\Bbbk \neq 2$.