# Эрмитовы пространства, комплексификация и овеществление

**A16⋄1 (теорема Шура).** Докажите, что любой $\mathbb{C}$-линейный оператор на эрмитовом пространстве имеет в подходящем ортонормальном базисе верхнетреугольную матрицу.

**A16⋄2.** Приведите пример $\mathbb{C}$-линейного оператора на конечномерном эрмитовом пространстве, имеющего инвариантное подпространство, ортогонал к которому не переводится оператором в себя.

**A16⋄3.** Пусть эрмитово пространство $U$ распалось в (возможно, не ортогональную) прямую сумму $U_1 \oplus U_2$. Обозначим через $\pi : U \to U$ оператор проектирования на подпространство $U_1$ вдоль подпространства $U_2$. Покажите, что $U = U_1^\perp \oplus U_2^\perp$ и опишите действие эрмитово сопряжённого к $\pi$ оператора $\pi^*$.

**A16⋄4.** Докажите для любого $\mathbb{C}$-линейного оператора $f$ на конечномерном эрмитовом пространстве равенства $\operatorname{im} f^* = (\ker f)^\perp$ и $\ker f^* = (\operatorname{im} f)^\perp$.

**A16⋄5 (нормальные операторы).** Докажите эквивалентность следующих свойств $\mathbb{C}$-линейного оператора $f$ на конечномерном эрмитовом пространстве: **а)** $f$ и $f^*$ перестановочны **б)** $||fu|| = ||f^*u||$ для всех $u$ **в)** самосопряжённая и антисамосопряжённая компоненты оператора $f$ перестановочны **г)** компоненты полярного разложения оператора $f$ перестановочны **д)** каждое $f$-инвариантное подпространство инвариантно и для $f^*$ **е)** ортогонал к любому $f$-инвариантному подпространству тоже $f$-инвариантен.

**A16⋄6*.** Верно ли, что при каждом $k \in \mathbb{N}$ уравнение $X^k = A$ на комплексную матрицу $X$ имеет для любой **а)** унитарной **б)** нормальной матрицы $A$ унитарное (соотв. нормальное) решение, являющееся многочленом от $A$?

**A16⋄7*.** Пусть самосопряжённый оператор $A$ на координатном пространстве $\mathbb{C}^n$ со стандартной эрмитовой структурой имеет различные собственные числа $\alpha_1 > \ldots > \alpha_n$. Для $r$-мерного подпространства $L \subset \mathbb{C}^n$ с ортонормальным базисом $e_1, \ldots, e_r$ положим $R_L(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{r}(Ae_i, e_i)$. Покажите, что $R_L(A)$ не зависит от выбора ортонормального базиса в $L$ и найдите $\max R_L(A)$ по всем $r$-мерным подпространствам $L \subset \mathbb{C}^n$.

**Обозначения.** Для $n$-мерного векторного пространства $W$ над полем $\mathbb{C}$ через $W_\mathbb{R}$ обозначается его *овеществление* — векторное пространство размерности $2n$ над полем $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, состоящее из тех же векторов, что и $W$. Для $n$-мерного векторного пространства $V$ над полем $\mathbb{R}$ через $V_\mathbb{C} = \mathbb{C} \otimes V$ обозначается его *комплексификация* — векторное пространство размерности $n$ над $\mathbb{C}$, овеществление которого, как векторное пространство над $\mathbb{R}$, является прямой суммой $V \oplus iV$. Комплексификация $\mathbb{R}$-линейного оператора $f : V \to V$ действует на $V_\mathbb{C}$ по правилу $f(u + iw) = f(u) + if(w)$.

**A16⋄8.** Обозначим через $W_{\mathbb{R}\mathbb{C}}$ комплексификацию $2n$-мерного вещественного векторного пространства $W_\mathbb{R}$, которое является овеществлением $n$-мерного комплексного векторного пространства $W$, и обозначим через $f_{\mathbb{R}\mathbb{C}} : W_{\mathbb{R}\mathbb{C}} \to W_{\mathbb{R}\mathbb{C}}$ комплексификацию $\mathbb{C}$-линеного оператора $f : W \to W$, рассматриваемого как $\mathbb{R}$-линейный оператор на овеществлённом пространстве $W_\mathbb{R}$. Как связаны друг с другом характеристические многочлены, собственные числа[1] и собственные векторы операторов операторов $f$ и $f_{\mathbb{R}\mathbb{C}}$ **а)** когда $W = \mathbb{C}$, а $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — это оператор умножения на $i$ **б)** в общем случае.

**A16⋄9 (сопряжённая комплексная структура).** Для векторного пространства $W$ над полем $\mathbb{C}$ обозначим через $\overline{W}$ совпадающее с $W$ как аддитивная абелева группа векторное пространство, в котором умножение векторов на комплексные числа происходит по правилу[2] $z \bar{\cdot} w \stackrel{\text{def}}{=} \bar{z} \cdot w$. Покажите, что $\overline{W}$ является векторным пространством над $\mathbb{C}$ той же размерности, что и $W$, и постройте канонический $\mathbb{C}$-линейный изоморфизм между комплексифицированным овеществлением $W_{\mathbb{R}\mathbb{C}}$ и прямой суммой $W \oplus \overline{W}$.

[1] Обратите внимание, что у оператора $f_{\mathbb{R}\mathbb{C}}$ характеристический многочлен имеет вдвое большую степень, чем у $f$, и собственных чисел у него, соответственно, тоже вдвое больше.

[2] В левой части стоит произведение в $\overline{W}$, которое мы определяем, а в правой — имеющееся произведение в $W$.

Персональный табель ________________________________________. **Листок № 16 (22 апреля 2021)**
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

| № | дата | кто принял | подпись |
|---|---|---|---|
| 1 | | | |
| 2 | | | |
| 3 | | | |
| 4 | | | |
| 5а | | | |
| б | | | |
| в | | | |
| г | | | |
| д | | | |
| е | | | |
| 6а | | | |
| б | | | |
| 7 | | | |
| 8а | | | |
| б | | | |
| 9 | | | |