Квадратичные формы

A15◇1. Какими могут быть ранг и сигнатура ограничения невырожденной вещественной квадратичной формы сигнатуры (p, m) на векторное подпространство коразмерности 1?

A15◇2. Существует ли на $\mathbb{R}^7$ квадратичная форма с главными угловыми минорами

а) $\Delta_1 > 0\,,\ \Delta_2 = 0\,,\ \Delta_3 > 0\,,\ \Delta_4 < 0\,,\ \Delta_5 = 0\,,\ \Delta_6 = 0\,,\ \Delta_7 > 0$
б) $\Delta_1 > 0\,,\ \Delta_2 = 0\,,\ \Delta_3 < 0\,,\ \Delta_4 < 0\,,\ \Delta_5 = 0\,,\ \Delta_6 = 0\,,\ \Delta_7 > 0$
в) $\Delta_1 < 0\,,\ \Delta_2 = 0\,,\ \Delta_3 > 0\,,\ \Delta_4 < 0\,,\ \Delta_5 = 0\,,\ \Delta_6 = 0\,,\ \Delta_7 < 0$
г) $\Delta_1 > 0\,,\ \Delta_2 = 0\,,\ \Delta_3 = 0\,,\ \Delta_4 = 0\,,\ \Delta_5 > 0\,,\ \Delta_6 = 0\,,\ \Delta_7 < 0$
д) $\Delta_1 = 0\,,\ \Delta_2 > 0\,,\ \Delta_3 = 0\,,\ \Delta_4 = 0\,,\ \Delta_5 = 0\,,\ \Delta_6 < 0\,,\ \Delta_7 > 0$?

Если да, то какая у неё может быть сигнатура?

A15◇3. Убедитесь, что функция $A \mapsto \det A$ является квадратичной формой на пространстве $\mathrm{Mat}_2(\Bbbk)$, и опишите такое линейное преобразование $Y \mapsto Y^?$ пространства $\mathrm{Mat}_2(\Bbbk)$, что поляризация формы det имеет вид $2\,\widetilde{\det}(X, Y) = \mathrm{tr}(X \cdot Y^?)$. Является ли форма det гиперболической?

A15◇4. Для $X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ пусть $\det(tE - X) = t^n - \sigma_1(X)\,t^{n-1} + \sigma_2(X)\,t^{n-2} - \cdots$. Убедитесь, что $\sigma_2(X)$ является квадратичной формой на пространстве $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, и вычислите её ранг и сигнатуру. Если общий случай вызывает затруднения, решите задачу для $n = 2, 3, 4$.

A15◇5. Найдите сигнатуру квадратичной формы $\mathrm{tr}\left(A^2\right)$ на пространстве $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$. Если общий случай вызывает затруднения, решите задачу для $n = 2, 3, 4$.

A15◇6. Рассмотрим поле $\mathbb{F}_{27} = \mathbb{F}_3[x]/(x^3 - x + 1)$ как трёхмерное векторное пространство над полем $\mathbb{F}_3$. Напишите матрицу Грама симметричной билинейной формы[1] $s(a, b) = \mathrm{tr}(ab)$ в базисе $[1]$, $[x]$, $[x^2]$ и опишите все изотропные векторы этой формы.

A15◇7. Обозначим через W пространство однородных грассмановых многочленов степени 2 от четырёх переменных ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 и зададим на W билинейную форму $p : W \times W \to \Bbbk$ правилом $\omega_1 \wedge \omega_2 = p(\omega_1, \omega_2) \cdot \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_3 \wedge \xi_4$. Напишите матрицу Грама формы p в базисе $\xi_{ij} = \xi_i \wedge \xi_j$, где $1 \leqslant i < j \leqslant 4$, и убедитесь, что эта форма симметрична и невырождена. Какова её сигнатура над полем $\Bbbk = \mathbb{R}$?

A15◇8. Покажите, что гиперболичность пространства W с невырожденной квадратичной формой равносильна каждому из условий: **а)** $\dim W = 2k$ и в W есть k-мерное изотропное подпространство **б)** $W = U_1 \oplus U_2$, где U_1 и U_2 изотропны.

A15◇9. Покажите, что над конечным полем **а)** невырожденная квадратичная форма от двух переменных всегда принимает все значения из этого поля **б)** любая квадратичная форма от трёх переменных имеет ненулевой изотропный вектор.

A15◇10. Покажите, что над конечным полем $\mathbb{F}_q$ любая невырожденная квадратичная форма н $\Bbbk^n$ линейной обратимой заменой координат приводится к виду $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ или к виду $\varepsilon x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$, где $\varepsilon \in \mathbb{F}_q$ — произвольно зафиксированный не квадрат, а эти две формы нельзя получить друг из друга линейной обратимой заменой переменных.

A15◇11. Для каждого простого натурального $p > 2$ перечислите все анизотропные квадратичные формы над полем $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$.

A15◇12*. Из скольких точек состоит проективная квадрика $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + \alpha\, x_3^2 = 0$ в пространстве $\mathbb{P}_3$ над полем $\mathbb{F}_9 = \mathbb{F}_3[t]/(t^2 + 1)$ в зависимости от параметра $\alpha \in \mathbb{F}_9$?

[1] Для $\xi \in \mathbb{F}_{27}$ через $\mathrm{tr}(\xi) \in \mathbb{F}_3$ обозначается след линейного оператора $\xi : \mathbb{F}_{27} \to \mathbb{F}_{27}$, $x \mapsto \xi x$, задаваемого умножением на ξ.