Билинейные формы

А14◇1. Пусть билинейная форма $\beta : V \times V \to \Bbbk$ не симметрична и не кососимметрична. Покажите, что среди билинейных форм $\lambda\beta(u, w) + \mu\beta(w, u)$, где $\lambda, \mu \in \Bbbk$ не обращаются одновременно в нуль, есть единственные с точностью до пропорциональности симметричная и кососимметричная формы. Могут ли обе они быть вырождены, если β невырождена?

А14◇2. Пусть для билинейной формы $\beta : V \times V \to \Bbbk$ и любых $u, w \in V$ равенства $\beta(u, w) = 0$ и $\beta(w, u) = 0$ эквивалентны. Покажите, что β симметрична или кососимметрична.

А14◇3. Приведите пример такого пространства V с вырожденной билинейной формой β и подпространства $U \subset V$, что[1] $V = U \oplus V^{\perp}$ и ограничение формы β на U вырождено.

А14◇4. Пусть несимметричная билинейная форма на пространстве V ограничивается в невырожденную форму на конечномерном подпространстве $U \subset V$. Постройте изометрический изоморфизм ${}^{\perp}U \simeq U^{\perp}$.

А14◇5 (изометрии). Пусть билинейная форма $\beta : V \times V \to \Bbbk$ невырождена. Линейный оператор $g : V \to V$ называется *изометрией* формы β если $\forall\, u, w \in V$ $\beta(gu, gw) = \beta(u, w)$. Покажите, что изометрии **а)** составляют подгруппу в $\mathrm{GL}(V)$ **б)** отличные от ± 1 собственные числа любой изометрии разбиваются на пары взаимно обратных с одинаковыми кратностями **в*)** над алгебраически замкнутым полем для каждой жордановой цепочки изометрии с собственным значением $\lambda \neq \pm 1$ найдётся такая жорданова цепочка той же длины с собственным значением λ^{-1}, что ограничение формы на линейную оболочку U объединения этих цепочек невырождено и ${}^{\perp}U = U^{\perp}$ **г*)** то же самое верно для каждой жордановой цепочки длины k с собственным значением $(-1)^k$.

А14◇6*. Докажите, что на n-мерном пространстве над алгебраически замкнутым полем канонический оператор[2] $\varkappa$ любой невырожденной билинейной формы имеет возвратный характеристический многочлен и **а*)** для каждого $\lambda \neq \pm 1$ из $\operatorname{Spec} \varkappa$ имеется сохраняющая размеры клеток биекция между жордановыми клетками с собственным числом λ и жордановыми клетками с собственным числом λ^{-1} **б*)** количества жордановых клеток каждого чётного размера с собственным числом $+1$ и каждого нечётного размера с собственным числом -1 всегда чётны **в*)** каждый невырожденный линейный оператор, удовлетворяющий условиям (а) и (б), является каноническим оператором для единственной с точностью до изометрического изоморфизма невырожденной билинейной формы.

А14◇7. Покажите, что пространство V с невырожденной кососимметричной формой имеет чётную размерность и каждое изотропное подпространство в V содержится в изотропном подпространстве размерности $\dim V/2$.

А14◇8. Покажите, что любая изометрия невырожденной кососимметричной формы имеет определитель 1 и возвратный характеристический многочлен.

А14◇9. Покажите, что группа изометрий невырожденной кососимметричной формы транзитивно действует на изотропных подпространствах любой фиксированной размерности и на подпространствах фиксированной размерности, на которые форма ограничивается невырождено.

А14◇10*. Фиксируем любое $n \in \mathbb{N}$ и любое чётное $m \leqslant n$. Для кососимметричной матрицы A размера $n \times n$ и произвольной матрицы C из m строк и n столбцов докажите тождество $\mathrm{Pf}(CAC^t) = \sum_{\#I=m} \mathrm{Pf}(A_I) \cdot \det(C_I)$, где суммирование идёт по всем наборам $I = (i_1, \dots, i_m)$ строго возрастающих индексов, C_I означает $m \times m$-минор, стоящий в столбцах с номерами из I, а $A_I \subset A$ — квадратная $m \times m$-подматрица, стоящая в пересечениях строк и столбцов с номерами из I.

[1] Напомню, что $V^{\perp} = \ker \beta^{\vee} = \{w \in V \mid \forall\, v \in V\ \beta(v, w) = 0\}$.

[2] Напомню, что он однозначно определяется тем, что $\beta(u, w) = \beta(w, \varkappa u)$ для всех u, w.

Персональный табель ____ . **Листок № 14 (25 марта 2021)**

(напишите свои имя, отчество и фамилию)

№	дата	кто принял	подпись
1			
2			
3			
4			
5а			
б			
в			
г			
6а			
б			
в			
7			
8			
9			
10			