

## Пространства с оператором



- A10♦1.** Всякая ли матрица сопряжена своей транспонированной?
- A10♦2.** Какова степень минимального многочлена квадратной матрицы ранга 1?
- A10♦3.** Перечислите классы подобных матриц в  $\text{Mat}_2(\mathbb{F}_p)$ ,  $\text{GL}_2(\mathbb{F}_p)$  и  $\text{SL}_2(\mathbb{F}_p)$  для  $p = 2, 3, 5$ .
- A10♦4.** Покажите, что каждый перестановочный с умножением на  $t$  линейный оператор  $G : \mathbb{k}[t]/(f) \rightarrow \mathbb{k}[t]/(f)$  является оператором умножения на многочлен  $g(t) = G([1])$ .
- A10♦5.** Минимальный многочлен оператора  $F : V \rightarrow V$  равен  $g_1 g_2$  и  $\text{НОД}(g_1, g_2) = 1$ . Покажите, что  $V = U_1 \oplus U_2$  с  $F(U_i) \subset U_i$  и минимальными многочленами  $F|_{U_i}$  равными  $g_i$ .
- A10♦6.** Пусть характеристический многочлен линейного оператора  $F : V \rightarrow V$  неприводим и имеет степень  $n$ . Покажите, что  $\dim V = n$  и для любого ненулевого  $v \in V$  векторы  $v, Fv, \dots, F^{n-1}v$  образуют в  $V$  базис.
- A10♦7.** Пусть минимальный многочлен линейного оператора  $F : V \rightarrow V$  совпадает с характеристическим. Всякий ли оператор, перестановочный с  $F$ , является многочленом от  $F$ ?
- A10♦8.** Пусть основное поле алгебраически замкнуто, и линейный оператор  $G$  перестановочен со всеми операторами, перестановочными с оператором  $F$ . Верно ли, что  $G$  является многочленом от  $F$ ?
- A10♦9.** Найдите  $\dim \text{Hom}_{\mathbb{k}[x]}(\mathbb{k}[x]/(f), \mathbb{k}[x]/(g))$ , когда  $f = p^n$ ,  $g = p^m$ , где  $p \in \mathbb{k}[x]$  неприводим, и когда  $\text{НОД}(f, g) = 1$ .
- A10♦10.** Линейный оператор  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  имеет матрицу с числами  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  на побочной диагонали и нулями в остальных местах. Когда он диагоналізуем над  $\mathbb{R}$ ?
- A10♦11.** Существуют ли  $(n + 1)$ -мерные векторные подпространства в  $\text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ , состоящие из попарно перестановочных диагоналируемых операторов  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ?
- A10♦12.** Равносильна ли нильпотентность линейного оператора  $F : \mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}^n$  тому, что  $\text{tr } F^k = 0$  при всех  $1 \leq k \leq n$ ?
- A10♦13.** Пусть операторы  $A$  и  $B$  таковы, что  $AB - BA = B$ . Покажите, что  $B$  нильпотентен.
- A10♦14\*** (лемма Барта). Докажите, что над алгебраически замкнутым полем любые два линейных оператора  $A, B$  с  $\text{rk}(AB - BA) = 1$  имеют общий собственный вектор.
- A10♦15.** Найдите ЖНФ квадрата  $J_m^2(\lambda)$  жордановой клетки  $m \times m$  с собственным числом  
а)  $\lambda \neq 0$  б)  $\lambda = 0$ .
- A10♦16.** Вычислите для аналитической в окрестности  $\lambda \in \mathbb{C}$  функции  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  матрицу  $f(J_m(\lambda))$ .
- A10♦17.** Дана матрица  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{k})$ . Операторы  $L_A, R_A, \text{Ad}_A : \text{Mat}_{n \times n} \rightarrow \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{k})$  переводят матрицу  $X$  в матрицы  $L_A(X) = AX$ ,  $R_A(X) = XA$ ,  $\text{Ad}_A(X) = AXA^{-1}$ . Вычислите их следы и определители.
- A10♦18.** Для матрицы  $A \in \text{Mat}_2(\mathbb{k})$  рассмотрим на пространстве однородных квадратичных многочленов от  $(x_1, x_2)$  линейный оператор замены переменных  $f(x_1, x_2) \mapsto f((x_1, x_2) \cdot A)$ . Найдите его след и определитель.
- A10♦19.** Предъявите такую вещественную  $2 \times 2$  матрицу  $A$ , что  
а)  $A^3 = \begin{pmatrix} -9 & -4 \\ 14 & 6 \end{pmatrix}$  б)  $A^5 = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 16 & 3 \end{pmatrix}$
- A10♦20.** Вычислите  $A^n$  и  $e^A$  для матрицы а)  $A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 18 & 8 \end{pmatrix}$  б)  $A = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ -40 & -9 \end{pmatrix}$ .