# Определители

**A8◇1.** Вычислите $\mathrm{sgn}(n,\,(n-1),\,\dots\,,\,2,\,1)$ и $\det\begin{pmatrix}0 & & 1\\ & \iddots & \\ 1 & & 0\end{pmatrix}$.

**A8◇2.** Вычислите определитель матрицы с 0 на главной диагонали и 1 в остальных местах.

**A8◇3.** Две строки матрицы $3\times 3$ заполнены целыми числами так, что нод чисел в каждой из них равен единице и строки не пропорциональны над $\mathbb{Q}$. Всегда ли возможно заполнить целыми числами третью строку так, чтобы определитель оказался единичным?

**A8◇4.** Двое по очереди заполняют целыми числами клетки матрицы $3\times 3$. Первый выигрывает, если в результате получится вырожденная матрица. Кто победит?

**A8◇5.** Сколько $n\times n$ матриц определителя 1 имеется над полем из $q$ элементов?

**A8◇6.** Числа $1,\,2,\,3,\,\dots\,,\,n^2$ всеми возможными способами организуются в квадратные матрицы размера $n\times n$. Найдите сумму определителей этих матриц.

**A8◇7.** Покажите, что определитель 3-диагональной матрицы с 1 по главной диагонали и непосредственно над ней и $-1$ непосредственно под ней является числом Фиббоначчи.

**A8◇8.** Будем обозначать через $\big(f(i,j)\big)\in \mathrm{Mat}_n(K)$ квадратную матрицу, у которой элемент в пересечении $i$-той строки с $j$-тым столбцом равен $f(i,j)$, где $f\,:\,\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to K$ — формула, перерабатывающая пару натуральных чисел $(i,j)$ в элемент $f(i,j)\in K$. Для двух заданных наборов чисел $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n,\,\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n\in\mathbb{R}$ вычислите **а)** $\det\big(\alpha_i\beta_j\big)$ **б)** $\det\big(\cos(\alpha_i-\beta_j)\big)$ **в)** $\det\left(\alpha_i^{j-1}\right)$ **г*)** $\det\left(\alpha^{j-i-1\ (\mathrm{mod}\ n)}\right)$.

**A8◇9 (теорема об окаймляющих минорах).** Для матрицы $A$ над произвольным полем докажите, что $\mathrm{rk}\,A=m$ если и только если в $A$ есть такая невырожденная $m\times m$ подматрица, что все содержащие её $(m+1)\times(m+1)$ подматрицы вырождены.

**A8◇10* (матричная теорема о деревьях).** Вершины связного графа $\Gamma$ без петель[1] и кратных рёбер[2] занумерованы числами от 1 до $n$. Матрица $A=\big(a_{ij}\big)$ имеет диагональные элементы $a_{ii}$, равные взятому со знаком минус количеству рёбер, сходящихся в $i$-той вершине, а остальные элементы $a_{ij}$ равны единице, если вершины $i$ и $j$ соединены ребром, и нулю — если не соединены. Докажите, что:

**а)** $\det A=0$

**б)** все алгебраические дополнения $A_{ii}$ к элементам главной диагонали отличны от нуля и равны между собой

**в)** $\Gamma$ дерево если и только если все $A_{ii}=1$.

**A8◇11.** Существует ли комплексная $2\times 4$ матрица с множеством $2\times 2$ миноров

**а)** $\{\,2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\,\}$ **б)** $\{\,3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\,\}$?

Если да — приведите пример такой матрицы, если нет — объясните, почему.

**A8◇12.** Пусть $AB=E$. Докажите соотношение $a_{IJ}=(-1)^{|I|+|J|}b_{\overline{J}\overline{I}}$ на дополнительные миноры.

**A8◇13.** Вычислите все частные производные $\dfrac{\partial^k\det(A)}{\partial a_{i_1j_1}\partial a_{i_2j_2}\dots\partial a_{i_kj_k}}$.

**A8◇14.** Для $A,B\in\mathrm{Mat}_n(K)$ докажите в $K[x,y]$ равенство $\det(xA+yB)=\sum\limits_{k=0}^{n}x^ky^{n-k}\cdot\mathrm{tr}\left(\mathcal{A}_k\cdot\mathcal{B}_k^\vee\right)$, где $\mathcal{A}_k$ и $\mathcal{B}_k^\vee$ суть матрицы размера $\binom{n}{k}\times\binom{n}{k}$, у которых в позиции $IJ$ стоят, соответственно, минор $a_{IJ}$ матрицы $A$ и алгебраическое дополнение $(-1)^{|J|+|I|}a_{\overline{J}\overline{I}}$ к $JI$-минору матрицы $B$.

[1] Т. е. рёбер, ведущих из вершины в неё саму.
[2] Т. е. любые две вершины графа соединяются не более, чем одним ребром.