Матрицы

A7◇1. Найдите $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}^{-1} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{Q})$ при $a \neq 0$.

A7◇2. Укажите в $\mathrm{Mat}_3(\mathbb{Q})$ какую-нибудь матрицу X с $X^3 = \begin{pmatrix} 8 & 16 & 32 \\ 0 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

A7◇3. Опишите центр $Z\left(\mathrm{Mat}_n(K)\right) \overset{\text{def}}{=} \{C \in \mathrm{Mat}_n(K) \mid \forall A \in \mathrm{Mat}_n(K)\ AC = CA\}$ кольца матриц над коммутативным кольцом K с единицей.

A7◇4. Решите в $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{Q})$ уравнения **а)** $X^2 = 0$ **б)** $X^3 = 0$ **в)** $X^2 = X$ **г)** $X^2 = E$ **д)** $X^2 = -E$.

A7◇5. Пусть матрица $A \in \mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$, где $\Bbbk$ поле, диагональна, причём все её диагональные элементы различны. Покажите, что любая матрица, коммутирующая с A, имеет вид $f(A)$ для некоторого многочлена $f(x) \in \Bbbk[x]$.

A7◇6. Покажите, что над любым полем $\Bbbk$ при любом $n \in \mathbb{N}$ **а)** $\mathrm{Mat}_{2n}(\Bbbk) \simeq \mathrm{Mat}_{2\times 2}\left(\mathrm{Mat}_n(\Bbbk)\right)$

б) если $A, B, C, D \in \mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$ таковы, что A обратима и $\mathrm{rk}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = n$, то $D = CA^{-1}B$

в) если $A, B, C, D \in \mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$ обратимы, то $A - BD^{-1}C$, $C - DB^{-1}A$, $B - AC^{-1}D$, $D - CA^{-1}B$ тоже обратимы и $\begin{pmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & (C - DB^{-1}A)^{-1} \\ (B - AC^{-1}D)^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1}$.

A7◇7. Покажите, что над полем всякая матрица ранга 1 является произведением столбца и строки, а всякая квадратная матрица ранга 1 пропорциональна своему квадрату.

A7◇8. Докажите, что над полем любую матрицу ранга r можно представить в виде суммы r матриц ранга 1, но нельзя представить в виде суммы меньшего числа таких матриц.

A7◇9. Для матрицы $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\Bbbk)$, где $\Bbbk$ поле, обозначим через $F_A : \Bbbk^n \to \Bbbk^m$ линейное отображение, переводящее столбец $x \in \Bbbk^n$ в столбец $F_A(x) = Ax \in \Bbbk^m$. Докажите для любых $A \in \mathrm{Mat}_{k\times\ell}(\Bbbk)$, $B \in \mathrm{Mat}_{\ell\times m}(\Bbbk)$ и $C \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\Bbbk)$ неравенства

а) $\mathrm{rk}(A) + \mathrm{rk}(B) - \ell \leqslant \mathrm{rk}(AB) \leqslant \min(\mathrm{rk}\,A, \mathrm{rk}\,B)$

б) $\dim \mathrm{im}\, F_B = \dim \mathrm{im}(F_A F_B) + \dim(\mathrm{im}\, F_B \cap \ker F_A)$

в) (неравенство Фробениуса) $\mathrm{rk}(AB) + \mathrm{rk}(BC) \leqslant \mathrm{rk}(ABC) + \mathrm{rk}(B)$

A7◇10 (коммутатор). Разность $[A, B] = AB - BA$ называется *коммутатором* квадратных матриц A, B. Докажите, для любых $A, B, C \in \mathrm{Mat}_n(R)$ над любым кольцом R *правила Лейбница*:

а) $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$ **б)** $[A, [B, C]] = [[A, B], C] + [B, [A, C]]$.

A7◇11 (след). Сумма $\mathrm{tr}\, A \overset{\text{def}}{=} \sum a_{ii}$ называется *следом* квадратной матрицы A. Покажите, что над любым коммутативным кольцом K **а)** $\mathrm{tr}[A, B] = 0$ для всех $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$

б) $\mathrm{tr}(C^{-1}AC) = \mathrm{tr}(A)$ для всех $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ и $C \in \mathrm{GL}_n(K)$.

A7◇12*. Найдите все такие матрицы $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\Bbbk)$, где $\Bbbk$ поле, что для всех $X \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\Bbbk)$ с $\mathrm{tr}\, X = 0$ выполняется равенство $\mathrm{tr}(AX) = 0$.

A7◇13 (нильпотентные матрицы). Квадратная матрица A называется *нильпотентной*, если $A^n = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Нильпотентна ли сумма $A + B$ нильпотентных матриц A, B

а) всегда **б)** когда $[A, B] = 0$ **в*)** когда $[A, [A, B]] = [B, [B, A]] = 0$?

A7◇14 (унипотентные матрицы). Квадратная матрица A называется *унипотентной*, если $A = E + N$, где N нильпотентна. Покажите, что:

а) над полем положительной характеристики унипотентность матрицы A означает, что $A^n = E$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$

б) над полем характеристики нуль унипотентность матрицы A означает, что $A = e^N = E + N + \frac{1}{2}N^2 + \frac{1}{6}N^3 + \cdots$ для некоторой нильпотентной матрицы N.