Идеалы и фактор кольца

A5◇1. Пусть A — коммутативное кольцо с единицей, $\mathfrak{a},\mathfrak{b}\subset A$ — произвольные идеалы[1]. Положим[2] $\sqrt{\mathfrak{a}}\overset{\text{def}}{=}\{a\in A\mid \exists n\in\mathbb{N}:a^n\in\mathfrak{a}\}$, $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\overset{\text{def}}{=}(\mathfrak{a},\mathfrak{b})=\{a+b\mid a\in\mathfrak{a},\ b\in\mathfrak{b}\}$ и обозначим через $\mathfrak{ab}$ идеал, порождённый произведениями[3] ab с $a\in\mathfrak{a}$, $b\in\mathfrak{b}$. Верно ли[4], что

а) произведения ab с $a\in\mathfrak{a}$, $b\in\mathfrak{b}$ и так, сами по себе, образуют идеал

б) $\sqrt{\mathfrak{a}}$ это идеал **в)** $\mathfrak{ab}=\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$ **г)** $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=A\Rightarrow\mathfrak{ab}=\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$ **д)** $(\mathfrak{a}=\sqrt{\mathfrak{a}}\ \&\ \mathfrak{b}=\sqrt{\mathfrak{b}})\Rightarrow\mathfrak{ab}=\sqrt{\mathfrak{ab}}$

е) $\sqrt{\mathfrak{ab}}=\sqrt{\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}}=\sqrt{\mathfrak{a}}\sqrt{\mathfrak{b}}$.

A5◇2 (китайская теорема об остатках). Пусть идеалы $\mathfrak{a}_1,\dots,\mathfrak{a}_m$ коммутативного кольца A с единицей таковы, что $\mathfrak{a}_i+\mathfrak{a}_j=A$ для всех $i\neq j$. Покажите, что $\mathfrak{a}_1\cdots\mathfrak{a}_m=\mathfrak{a}_1\cap\ldots\cap\mathfrak{a}_m$ и постройте изоморфизм $A/\mathfrak{a}_1\cdots\mathfrak{a}_m\xrightarrow{\sim}(A/\mathfrak{a}_1)\times\cdots\times(A/\mathfrak{a}_m)$.

Максимальность, простота и неприводимость. В коммутативном кольце A с единицей собственный[5] идеал $\mathfrak{a}\subset A$ называется *простым* (соотв. *максимальным*), если кольцо $A/\mathfrak{a}$ не имеет делителей нуля (соотв. является полем). Элемент $a\in A$ называется *простым*, если идеал $(a)\subset A$ прост, и *неприводимым*, если равенство $a=rs$ влечёт обратимость r или s.

A5◇3. Опишите все идеалы в кольце $\Bbbk[\![x]\!]$, где $\Bbbk$ — произвольное поле. Какие из них максимальны? Какие просты?

A5◇4*. Сопоставим вещественному числу $p\in[0\,,1]$ множество $\mathfrak{m}_p$ всех таких непрерывных функций $[0\,,1]\to\mathbb{R}$, что $f(p)=0$. Покажите, что это биекция между точками отрезка $[0\,,1]$ и максимальными идеалами в кольце непрерывных функций $[0\,,1]\to\mathbb{R}$.

A5◇5*. Всякий ли простой идеал кольца непрерывных функций $[0\,,1]\to\mathbb{R}$ максимален?

A5◇6. Найдите[6] в кольце $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ **а)** непростой неприводимый элемент **б)** элемент, имеющий два различных[7] разложения на неприводимые множители.

A5◇7. Докажите, что пересечение конечного набора произвольных идеалов содержится в простом идеале $\mathfrak{p}$ если и только если $\mathfrak{p}$ содержит один из этих идеалов целиком.

A5◇8. Докажите, что произвольный идеал $\mathfrak{a}\subset A$ содержится в объединении конечного набора простых идеалов если и только если $\mathfrak{a}$ содержится в одном из них.

A5◇9*. Докажите, что пересечение всех простых идеалов любого коммутативного кольца с единицей совпадает с его *нильрадикалом*[8] $\sqrt{0}$.

A5◇10. Пусть $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{Z}$ все различны. Приводимы ли в $\mathbb{Q}[x]$ многочлены:

а) $(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)-1$ **б)** $(x-a_1)^2\dots(x-a_n)^2+1$ **в)** $x^{105}-9$.

A5◇11. Пусть $\Bbbk$ — поле характеристики p и $a\in\Bbbk$. Верно ли, что многочлен $f(x)=x^p-a$ либо неприводим в $\Bbbk[x]$, либо имеет p-кратный корень в $\Bbbk$?

A5◇12. Пусть многочлен $f(x)=x^p-x-a\in\mathbb{F}_p[x]$ имеет в неком расширении $\mathbb{K}\supset\mathbb{F}_p$ корень ζ. Явно укажите в $\mathbb{K}$ ещё $p-1$ корней многочлена f. Верно ли, что в $\mathbb{F}_p[x]$ многочлен f либо неприводим, либо полностью разлагается на линейные множители?

---

[1] Т. е. подкольца, содержащие вместе с каждым элементом и все его кратные.

[2] $\sqrt{\mathfrak{a}}$ называется *радикалом* идеала $\mathfrak{a}$

[3] Т. е. пересечение всех идеалов, содержащих эти произведения, или (что то же самое) — множество всевозможных сумм вида $a_1b_1+\cdots+a_mb_m$, где $m\in\mathbb{N}$, $a_i\in\mathfrak{a}$, $b_i\in\mathfrak{b}$.

[4] Верные утверждение докажите, к неверным приведите явные контрпримеры.

[5] Т. е. отличный от всего кольца.

[6] При решении этой задачи полезно понятие *нормы* $\|a+b\sqrt{5}\|\overset{\text{def}}{=}(a+b\sqrt{5})(a-b\sqrt{5})=a^2-5b^2$ и то, что *норменное отображение* $z\mapsto\|z\|$ является мультипликативным гомоморфизмом $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]\to\mathbb{Z}$.

[7] Т. е. неприводимые сомножители этих разложений нельзя привести в биективное соответствие друг с другом так, чтобы соответственные множители получались друг из друга умножением на обратимый элемент кольца.

[8] Т. е. с множеством всех нильпотентных элементов кольца.