Многочлены и расширения полей

А3◇1. Найдите в $\mathbb{Q}[x]$ все многочлены с остатками $1+x$, $1+x^3$ и $1+x^5$ от деления на $1+x^2$, $1+x^4$ и $1+x^8$ соответственно.

А3◇2. Может ли неприводимый многочлен $f \in \mathbb{Z}[x]$ степени $\deg f \geqslant 2$ иметь
а) рациональные корни? **б)** кратные комплексные корни?

А3◇3. Пусть $\mathbb{F}$ — конечное поле. Верно ли, что любая функция $\mathbb{F} \to \mathbb{F}$ является многочленом? Могут ли разные многочлены задавать одинаковые функции?

А3◇4. Покажите, что над любым (в том числе конечным) полем $\Bbbk$ множество неприводимых многочленов в $\Bbbk[x]$ бесконечно.

А3◇5. Найдите **а)** все неприводимые многочлены степени $\leqslant 5$ в $\mathbb{F}_2[x]$ **б)** все неприводимые многочлены степени 2 в $\mathbb{F}_3[x]$ **в*)** суммарное количество неприводимых многочленов степени 3 и 4 в $\mathbb{F}_3[x]$ **г)** все квадраты в полях $\mathbb{F}_4$, $\mathbb{F}_8$, $\mathbb{F}_9$ и $\mathbb{F}_{16}$.

А3◇6. Будет ли полем **а)** $\mathbb{R}[x]/\big(x^4+1\big)$ **б)** $\mathbb{Q}[x]/\big(x^4+1\big)$ **в)** $\mathbb{Q}[x]/\big(x^3+x+1\big)$? В случаях, когда да, найдите элемент, обратный к классу многочлена $x+1$.

А3◇7. Приводимы ли в $\mathbb{Q}[x]$ многочлены: **а)** $x^4-8x^3+12x^2-6x+2$ **б)** $x^5-12x^3+36x-12$.

А3◇8*. В кольце $\mathbb{Z}[x]$ разложите на неприводимые множители или докажите неприводимость многочленов: **а)** t^4+t+1 **б)** $t^5+t^4+t^2+t+2$ **в)** t^6+t^3+1.

А3◇9 (Евклидовы кольца). Целостное[1] коммутативное кольцо A называется *евклидовым*, если на нём задана такая функция $\nu : A \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ (*евклидова норма*), что $\forall\, a, b \in A \smallsetminus \{0\}$
(1) $\nu(ab) \geqslant \nu(a)$
(2) $\exists\, q, r \in A : a = bq + r$ и при этом либо $r = 0$, либо $\nu(r) < \nu(b)$.
Покажите, что для любых ненулевых элементов a, b евклидова кольца A:
а) $\nu(ab) = \nu(a)$ если и только если b обратим
б) среди общих делителей a и b имеется единственный с точностью до умножения на обратимые элементы кольца делитель наибольшей нормы[2], причём он делится на все общие делители a и b и представляется в виде $ax + by$ с $x, y \in A$
в) (алгоритм Евклида) при $\nu(a) > \nu(b)$ НОД(a, b) совпадает с последним ненулевым элементом последовательности r_n, в которой $r_1 = a$, $r_2 = b$ и $r_n = r_{n-2} - q_{n-1} r_{n-1}$ при $n > 2$ — это (любой) удовлетворяющий свойству (2) остаток от деления r_{n-2} на r_{n-1}.

А3◇10. Покажите, что кольца **а)** $\mathbb{Z}[x]/(x^2+1)$ **б)** $\mathbb{Z}[x]/(x^2+x+1)$ евклидовы.

А3◇11. Покажите, что любой идеал[3] в евклидовом кольце является главным[4].

А3◇12. Являются ли $\mathbb{Q}[x, y]$ и $\mathbb{Z}[x]$ кольцами главных идеалов?

А3◇13*. Пусть общие делители многочленов $f, g \in \mathbb{Z}[x]$ исчерпываются ± 1. Обязательно ли конечно фактор кольцо $\mathbb{Z}[x]/(f, g)$?

А3◇14. В поле $\mathbb{C}$ явно вычислите $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\operatorname{Arg} z$ для
а) $z = (1+i)^5/(1-i)^3$ **б)** $\Big((\sqrt{3}+i)/(1-i)\Big)^{30}$ **в)** $z^2 = a + ib$, где $a, b \in \mathbb{R}$ даны.

А3◇15. Выразите $\sin 5\varphi$ через $\sin\varphi$ и получите для $\sin(4\pi/5)$ и $\cos(2\pi/5)$ явные выражения в радикалах от рациональных чисел.

А3◇16. В поле $\mathbb{C}$ вычислите для всех $n, s \in \mathbb{N}$ **а)** сумму **б)** произведение s-тых степеней всех корней n-той степени из 1.

А3◇17. Вычислите суммы: **а)** $\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \cdots$ **б)** $\binom{n}{1} + \binom{n}{5} + \binom{n}{9} + \cdots$.

---

[1] Т. е. с единицей и без делителей нуля.
[2] Он называется *наибольшим общим делителем* и обозначается НОД(a, b).
[3] Т. е. подкольцо, содержащее вместе с каждым элементом и все его кратные.
[4] Т. е. состоит из всех элементов, делящихся на некоторый заданный.