

## §10. Пространство с оператором

**10.1. Классификация пространств с оператором.** Пусть  $\mathbb{k}$  — произвольное поле,  $V$  — конечномерное векторное пространство над  $\mathbb{k}$ , а  $F : V \rightarrow V$  — линейный эндоморфизм пространства  $V$ . Мы будем называть пару  $(F, V)$  *пространством с оператором* или просто *оператором* над  $\mathbb{k}$ . Линейное отображение  $C : U_1 \rightarrow U_2$  между пространствами с операторами  $(F_1, U_1)$  и  $(F_2, U_2)$  называется *гомоморфизмом*, если  $F_2 \circ C = C \circ F_1$ . В этом случае говорят, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U_1 & \xrightarrow{C} & U_2 \\ F_1 \uparrow & & \uparrow F_2 \\ U_1 & \xrightarrow{C} & U_2 \end{array}$$

коммутативна<sup>1</sup>. Если гомоморфизм  $C$  биективен, операторы  $F_1 : U_1 \rightarrow U_1$  и  $F_2 : U_2 \rightarrow U_2$  называются *изоморфными* или *подобными*. Поскольку в этом случае  $F_2 = CF_1C^{-1}$ , то говорят, что оператор  $F_2$  получается из  $F_1$  *сопряжением* посредством изоморфизма  $C$ .

Подпространство  $U \subset V$  называется *F-инвариантным*, если  $F(U) \subset U$ . В этом случае пара  $(F|_U, U)$  тоже является пространством с оператором и вложение  $U \hookrightarrow V$  представляет собою гомоморфизмом пространств с операторами. Оператор, не имеющий инвариантных подпространств, отличных от нуля и всего пространства, называется *неприводимым* или *простым*.

**Упражнение 10.1.** Покажите, что оператор умножения на класс  $[t]$  в фактор кольце  $\mathbb{R}[t]/(t^2 + 1)$  неприводим.

Оператор  $F : V \rightarrow V$  называется *разложимым*, если  $V$  раскладывается в прямую сумму двух ненулевых  $F$ -инвариантных подпространств, и *неразложимым* — в противном случае. Все простые операторы неразложимы.

**Упражнение 10.2.** Покажите, что оператор умножения на класс  $[t]$  в фактор кольце  $\mathbb{k}[t]/(t^n)$  при всех  $n > 1$  приводим, но неразложим.

Таким образом, над любым полем  $\mathbb{k}$  имеются неразложимые пространства с оператором любой размерности. Очевидно, что всякое пространство с оператором является прямой суммой неразложимых.

**10.1.1. Пространство с оператором как  $\mathbb{k}[t]$ -модуль.** Задание на пространстве  $V$  линейного оператора  $F : V \rightarrow V$  эквивалентно заданию на  $V$  структуры модуля над кольцом многочленов  $\mathbb{k}[t]$ . В самом деле, структура  $\mathbb{k}[t]$ -модуля включает в себя операцию умножения векторов на переменную  $t : v \mapsto tv$ , которая является линейным отображением  $V \rightarrow V$ . Если обозначить его буквой  $F$ , то умножение векторов на произвольный многочлен  $f(t) = a_0 + a_1t + \dots + a_mt^m$  происходит по правилу  $f(t)v = a_0v + a_1Fv + \dots + a_mF^mv = f(F)v$ , где

$$f(F) = a_0\text{Id}_V + a_1F + \dots + a_mF^m$$

есть результат вычисления многочлена  $f$  на элементе  $F$  в  $\mathbb{k}$ -алгебре  $\text{End}(V)$ . Наоборот, каждый линейный оператор  $F : V \rightarrow V$  задаёт на  $V$  структуру  $\mathbb{k}[t]$ -модуля, в котором умножение вектора  $v \in V$  на многочлен  $f(t) \in \mathbb{k}[t]$  происходит по формуле  $f(t)v \stackrel{\text{def}}{=} f(F)v$ . Мы будем обозначать такой  $\mathbb{k}[t]$ -модуль через  $V_F$ .

<sup>1</sup> произвольная диаграмма отображений называется *коммутативной*, если композиции отображений вдоль любых двух путей с общим началом и концом одинаковы

Гомоморфизм  $\mathbb{k}[t]$ -модулей  $C : V_F \rightarrow W_G$ , построенных по операторам  $F : V \rightarrow V$  и  $G : W \rightarrow W$  — это линейное отображение  $C : V \rightarrow W$ , перестановочное с умножением векторов на  $t$ , т. е. такое что  $C \circ F = F \circ C$ . Поэтому операторы  $F$  и  $G$  изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны  $\mathbb{k}[t]$ -модули  $V_F$  и  $W_G$ .

Векторное подпространство  $U \subset V$  является  $\mathbb{k}[t]$ -подмодулем в модуле  $V_F$  если и только если оператор умножения на  $t$  переводит  $U$  в себя, т. е. тогда и только тогда, когда это подпространство  $F$ -инвариантно. Аналогично, разложимость  $V$  в прямую сумму инвариантных подпространств означает разложимость  $\mathbb{k}[t]$ -модуля  $V_F$  в прямую сумму  $\mathbb{k}[t]$ -подмодулей.

Если векторное пространство  $V$  конечномерно над  $\mathbb{k}$ , то  $\mathbb{k}[t]$ -модуль  $V_F$  является конечно порождённым модулем кручения. В самом деле, любой базис пространства  $V$  над  $\mathbb{k}$  линейно порождает модуль  $V_F$  над  $\mathbb{k}[t]$ , и в каноническом разложении модуля  $V_F$  в прямую сумму свободного модуля и модуля кручения<sup>1</sup> свободное слагаемое отсутствует, поскольку оно бесконечномерно над  $\mathbb{k}$ . Из теоремы об элементарных делителях<sup>2</sup> вытекает

#### ТЕОРЕМА 10.1

Любой линейный оператор в конечномерном векторном пространстве над произвольным полем  $\mathbb{k}$  подобен оператору умножения на класс  $[t]$  в прямой сумме фактор колец

$$\frac{\mathbb{k}[t]}{(p_1^{m_1}(t))} \oplus \dots \oplus \frac{\mathbb{k}[t]}{(p_k^{m_k}(t))}, \quad (10-1)$$

где все многочлены  $p_\nu(t) \in \mathbb{k}[t]$  приведены и неприводимы, и слагаемые могут повторяться. Операторы умножения на класс  $[t]$ , действующие в суммах

$$\frac{\mathbb{k}[t]}{(p_i^{m_i}(t))} \oplus \dots \oplus \frac{\mathbb{k}[t]}{(p_k^{m_k}(t))} \quad \text{и} \quad \frac{\mathbb{k}[t]}{(q_i^{n_i}(t))} \oplus \dots \oplus \frac{\mathbb{k}[t]}{(q_\ell^{n_\ell}(t))}$$

изоморфны если и только если  $k = \ell$  и прямые слагаемые можно переставить так, чтобы  $p_\nu = q_\nu$  и  $m_\nu = n_\nu$  при всех  $\nu$ .  $\square$

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.1 (ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ДЕЛИТЕЛИ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА)

Дизъюнктное объединение<sup>3</sup> всех многочленов  $p_\nu^{m_\nu}$ , стоящих в правой части разложения (10-1), называется *набором элементарных делителей* оператора  $F : V \rightarrow V$  и обозначается через  $\mathcal{E}\ell(F)$ .

#### СЛЕДСТВИЕ 10.1

Линейные операторы  $F$  и  $G$  подобны тогда и только тогда, когда  $\mathcal{E}\ell(F) = \mathcal{E}\ell(G)$ .  $\square$

#### СЛЕДСТВИЕ 10.2

Линейный оператор неразложим тогда и только тогда, когда он подобен оператору умножения на класс  $[t]$  в фактор кольце  $\mathbb{k}[t]/(p^m)$ , где  $p \in \mathbb{k}[t]$  неприводим и приведён. Неразложимый оператор неприводим если и только если  $m = 1$ .  $\square$

#### СЛЕДСТВИЕ 10.3

Многочлен  $f \in \mathbb{k}[t]$  тогда и только тогда аннулирует оператор  $F : V \rightarrow V$ , когда он делится на все элементарные делители оператора  $F$ .  $\square$

<sup>1</sup>См. сл. 9.2 на стр. 129.

<sup>2</sup>См. теор. 9.3 на стр. 128.

<sup>3</sup>Каждый элементарный делитель  $p^m$  входит в него ровно столько раз, сколько прямых слагаемых вида  $\mathbb{k}[t]/(p^m)$  имеется в разложении (10-1).

УПРАЖНЕНИЕ 10.3. Пусть пространство с оператором  $(F, V)$  разлагается в прямую сумму  $F$ -инвариантных подпространств  $U_i$ . Покажите, что  $\mathcal{E}\ell(F) = \bigsqcup_i \mathcal{E}\ell(F|_{U_i})$ .

**10.1.2. Характеристический многочлен.** Пусть оператор  $F : V \rightarrow V$  имеет в некотором базисе  $\mathbf{v}$  пространства  $V$  матрицу  $F_{\mathbf{v}}$ . Характеристический многочлен  $\det(tE - F_{\mathbf{v}})$  этой матрицы не меняется при переходе к любому другому базису  $\mathbf{w} = \mathbf{v}C$ , поскольку<sup>1</sup>  $F_{\mathbf{w}} = C^{-1}F_{\mathbf{v}}C$  и

$$\begin{aligned} \det(tE - F_{\mathbf{w}}) &= \det(tC^{-1}EC - C^{-1}F_{\mathbf{v}}C) = \det(C^{-1}(tE - F_{\mathbf{v}})C) = \\ &= \det C^{-1} \cdot \det(tE - F_{\mathbf{v}}) \cdot \det C = \det(tE - F_{\mathbf{v}}). \end{aligned}$$

Многочлен  $\chi_F(t) \stackrel{\text{def}}{=} \det(tE - F_{\mathbf{v}})$  называется *характеристическим многочленом* оператора  $F$ . Предыдущее вычисление показывает, что подобные операторы имеют равные характеристические многочлены.

УПРАЖНЕНИЕ 10.4. Пусть пространство с оператором  $(F, W)$  распадается в прямую сумму пространств с операторами  $(G, U)$  и  $(H, V)$ . Убедитесь, что  $\chi_F(t) = \chi_G(t) \cdot \chi_H(t)$  в  $\mathbb{k}[t]$ .

УПРАЖНЕНИЕ 10.5. Убедитесь, что для любого приведённого многочлена  $f \in \mathbb{k}[t]$  характеристический многочлен оператора умножения на класс  $[t]$  в фактор кольце  $\mathbb{k}[t]/(f)$  равен  $f$ .

Из этих упражнений и теор. 10.1 мы получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10.1

Характеристический многочлен равен произведению всех элементарных делителей.  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 10.6. Выведите из предл. 10.1 новое доказательство теоремы Гамильтона – Кэли.

**10.1.3. Минимальный многочлен.** Для каждого неприводимого приведённого многочлена  $p \in \mathbb{k}[t]$  обозначим через  $m_p(F)$  максимальный показатель  $m$ , с которым  $p^m$  присутствует в наборе  $\mathcal{E}\ell(F)$  элементарных делителей оператора  $F$ , а для тех неприводимых приведённых многочленов  $p \in \mathbb{k}[x]$ , степени которых не представлены в  $\mathcal{E}\ell F$ , положим  $m_p(F) = 0$ . Таким образом,  $m_p(F) = 0$  для всех неприводимых приведённых  $p \in \mathbb{k}[x]$  кроме конечного числа. Из теор. 10.1 вытекает, что приведённый многочлен  $\mu_F(t)$  наименьшей возможной степени, аннулирующий оператор  $F$ , равен

$$\mu_F(t) = \prod_p p^{m_p(F)},$$

где произведение берётся по всем приведённым неприводимым  $p \in \mathbb{k}[t]$ . Многочлен  $\mu_F(t)$  называется *минимальным многочленом* оператора  $F$ . Напомню, что минимальный многочлен порождает ядро гомоморфизма вычисления<sup>2</sup> многочленов на операторе  $F$

$$\text{ev}_F : \mathbb{k}[t] \rightarrow \text{End}_{\mathbb{k}}(V), \quad f(t) \mapsto f(F),$$

и делит в  $\mathbb{k}[t]$  все многочлены, аннулирующие оператор  $F$ , включая и характеристический многочлен  $\chi_F(t) = \det(t \text{Id}_V - F)$ .

ПРИМЕР 10.1 (ОПЕРАТОРЫ НАД АЛГЕБРАИЧЕСКИ ЗАМКНУТЫМ ПОЛЕМ)

Если основное поле  $\mathbb{k}$  алгебраически замкнуто, то неприводимые приведённые многочлены в  $\mathbb{k}[t]$  исчерпываются линейными двучленами  $(t - \lambda)$ ,  $\lambda \in \mathbb{k}$ . Оператор умножения на класс

<sup>1</sup>См. прим. 7.3 на стр. 99.

<sup>2</sup>См. п° 7.2.3 на стр. 102.

$[t] = [\lambda] + [t - \lambda]$  в фактор кольце  $\mathbb{k}[t]/((t - \lambda)^m)$  является суммой скалярного оператора  $\lambda \text{Id} : [g] \mapsto \lambda[g]$ , умножающего все векторы на  $\lambda$ , и оператора умножения на класс  $(t - \lambda)$ , который действует на состоящий из векторов  $e_i = [(t - \lambda)^{m-i}]$ ,  $1 \leq i \leq m$ , базис пространства  $\mathbb{k}[t]/((t - \lambda)^m)$  по правилу

$$0 \leftarrow e_1 \leftarrow e_2 \leftarrow e_3 \leftarrow \dots \leftarrow e_{m-1} \leftarrow e_m. \quad (10-2)$$

Таким образом, умножение на класс  $[t]$  задаётся в базисе  $e_1, \dots, e_m$  матрицей

$$J_m(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad (10-3)$$

которая называется *жордановой клеткой* размера  $m$  с *собственным числом*  $\lambda$ . По [теор. 10.1](#) каждый линейный оператор  $F$  над алгебраически замкнутым полем подобен оператору умножения на класс  $[t]$  в прямой сумме фактор колец вида  $\mathbb{k}[t]/((t - \lambda)^m)$ , и два таких оператора подобны если и только если прямые суммы отличаются друг от друга перестановкой слагаемых. При этом характеристический многочлен оператора  $F$  равен произведению всех  $(t - \lambda)^m$ , встречающихся в прямой сумме, а минимальный многочлен оператора  $F$  равен произведению максимальных для данного  $\lambda \in \mathbb{k}$  степеней  $(t - \lambda)^m$ , взятому по всем различным  $\lambda$ , встречающимся в прямой сумме. Таким образом, характеристический и минимальный многочлены имеют одинаковый набор корней. Он обозначается  $\text{Spec } F$  и называется *спектром* оператора  $F$ , а сами корни  $\lambda \in \text{Spec } F$  называются *собственными числами* или *собственными значениями* оператора  $F$ . Кратность корня  $\lambda \in \text{Spec } F$  в минимальном многочлене  $\mu_F(t)$  равна максимальному такому  $m$ , что  $(t - \lambda)^m \in \mathcal{E}(F)$ , а кратность корня  $\lambda \in \text{Spec } F$  в характеристическом многочлене  $\chi_F(t)$  равна сумме всех таких  $m$ , что  $(t - \lambda)^m \in \mathcal{E}(F)$ .

На языке матриц сказанное означает, что любая квадратная матрица  $A$  над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  сопряжена блочно диагональной матрице, по главной диагонали которой располагаются жордановы клетки (10-3), причём эта блочно диагональная матрица однозначно с точностью до перестановки клеток определяется матрицей  $A$ . Она называется *жордановой нормальной формой* матрицы  $A$ . Две матрицы сопряжены если и только если у них одинаковые с точностью до перестановки клеток жордановы нормальные формы. Числа  $\lambda$ , встречающиеся в клетках жордановой нормальной формы матрицы  $A$  суть корни характеристического многочлена  $\chi_A(t) = \det(tE - A)$ , и кратность каждого корня  $\lambda$  равна сумме размеров всех жордановых клеток с собственным числом  $\lambda$ . Минимальный многочлен  $\mu_A = \prod_{\lambda \in \text{Spec } A} (t - \lambda)^{m_\lambda}$  равен взятому по всем корням  $\lambda$  характеристического многочлена матрицы  $A$  одночленов  $(t - \lambda)$  в степенях, равных максимальным размерам жордановых клеток с собственным числом  $\lambda$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 10.7.** Как действует умножение на класс  $[t]$  в фактор кольце  $\mathbb{k}[t]/(t - \lambda)$  и в прямой сумме конечного множества таких фактор колец?

**10.1.4. Отыскание элементарных делителей.** Зафиксируем в пространстве  $V$  какой-нибудь базис  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$  над полем  $\mathbb{k}$  и обозначим через  $F_{\mathbf{v}} \in \text{Mat}_n(\mathbb{k})$  матрицу оператора  $F : V \rightarrow V$  в этом базисе. Поскольку векторы  $v_i$  линейно порождают пространство  $V$  над  $\mathbb{k}$ , они тем более порождают модуль  $V_F$  над  $\mathbb{k}[t]$ , и  $V_F = \mathbb{k}[t]^n / R_{\mathbf{v}}$ , где подмодуль  $R_{\mathbf{v}} = \ker \pi_{\mathbf{v}} \subset \mathbb{k}[t]^n$

является ядром эпиморфизма<sup>1</sup>  $\pi_v : \mathbb{k}[t]^n \rightarrow V_F$ , переводящего стандартный базисный вектор  $e_i \in \mathbb{k}[t]^n$  в вектор  $v_i \in V$ , и состоит из всех  $\mathbb{k}[t]$ -линейных соотношений между векторами  $v$  в  $V_F$ . Таким образом, множество  $\mathcal{E}\ell(F)$  элементарных делителей оператора  $F$  представляет собою множество элементарных делителей, ассоциированное с набором инвариантных множителей подмодуля соотношений  $R_v$  в свободном координатном модуле  $\mathbb{k}[t]^n$ .

ЛЕММА 10.1

Если записывать элементы свободного модуля  $\mathbb{k}[t]^n$  в виде координатных столбцов с элементами из  $\mathbb{k}[t]$ , то подмодуль соотношений  $\ker \pi_v \subset \mathbb{k}[t]^n$  линейно порождается над  $\mathbb{k}[t]$  столбцами матрицы  $tE - F_v$ .

Доказательство. Пусть  $F_v = (f_{ij})$ . Тогда  $j$ -й столбец матрицы  $tE - F_v$  выражается через стандартный базис  $e$  модуля  $\mathbb{k}[t]^n$  как  $te_j - \sum_{i=1}^n e_i f_{ij}$ . Применяя к этому вектору гомоморфизм  $\pi_v$ , получаем  $\pi_v(te_j - \sum_{i=1}^n e_i f_{ij}) = tv_j - \sum_{i=1}^n v_i f_{ij} = Fv_j - \sum_{i=1}^n v_i f_{ij} = 0$ . Тем самым, все столбцы матрицы  $tE - F_v$  лежат в  $\ker \pi_v$ . Рассмотрим теперь произвольный вектор  $h \in \ker \pi_v \subset \mathbb{k}[t]^n$  и запишем его в виде многочлена от  $t$  с коэффициентами в  $\mathbb{k}^n$  (ср. с н° 8.3 на стр. 117):

$$h = t^m h_m + t^{m-1} h_{m-1} + \dots + t h_1 + h_0, \quad \text{где } h_i \in \mathbb{k}^n.$$

Этот многочлен можно поделить с остатком слева на многочлен  $tE - F_v$  точно также, как делят «уголком» обычные полиномы с постоянными коэффициентами<sup>2</sup>. В результате получим равенство вида  $t^m h_m + \dots + t h_1 + h_0 = (tE - F_v) \cdot (t^{m-1} g_{m-1} + \dots + t g_1 + g_0) + r$  с  $g_i, r \in \mathbb{k}^n$ .

УПРАЖНЕНИЕ 10.8. Убедитесь в этом.

Иными словами, вычитая из столбца  $h \in \mathbb{k}[t]^n$  подходящую  $\mathbb{k}[t]$ -линейную комбинацию столбцов матрицы  $tE - F_v$ , можно получить вектор  $r \in \mathbb{k}^n$ , т. е.  $\mathbb{k}$ -линейную комбинацию  $r = \sum \lambda_i e_i$  стандартных базисных векторов  $e_i$  модуля  $\mathbb{k}[t]^n$ . Так как столбцы матрицы  $tE - F_v$  лежат в ядре гомоморфизма  $\pi_v$ , а векторы  $v_i \in V$  линейно независимы над  $\mathbb{k}$ , вектор  $\pi_v(h) = \pi_v(r) = \sum \lambda_i v_i$  обращается в нуль если и только если все  $\lambda_i = 0$ . Следовательно,  $r = 0$  и столбец  $h$  лежит в  $\mathbb{k}[t]$ -линейной оболочке столбцов матрицы  $tE - F_v$ .  $\square$

СЛЕДСТВИЕ 10.4

Множество  $\mathcal{E}\ell(F)$  является дизъюнктивным объединением степеней  $p^m$  неприводимых приведённых многочленов, встречающихся в разложениях инвариантных множителей<sup>3</sup>

$$f_i(t) = \Delta_i(tE - F_v) / \Delta_{i-1}(tE - F_v)$$

матрицы  $tE - F_v$  на простые множители в  $\mathbb{k}[t]$ . Инвариантные множители  $f_i(t) = d_{ii}$  совпадают с диагональными элементами матрицы  $D$ , которая получается в результате приведения матрицы  $tE - F_v$  к диагональному виду элементарными преобразованиями строк и столбцов над кольцом  $\mathbb{k}[t]$ .  $\square$

**10.2. Специальные классы операторов.** В этом разделе мы подробно остановимся на свойствах нескольких специальных классов операторов, играющих важную роль в различных задачах их самых разных областей математики.

<sup>1</sup>См. н° 9.2 на стр. 124.

<sup>2</sup>См. н° 3.2 на стр. 37.

<sup>3</sup>Напомню, что  $\Delta_i$  означает нод всех  $k \times k$  миноров матрицы, см. сл. 9.1 на стр. 124.

**10.2.1. Нильпотентные операторы.** Линейный оператор  $F : V \rightarrow V$  называется *нильпотентным*, если  $F^m = 0$  для некоторого  $m \in \mathbb{N}$ . Поскольку нильпотентный оператор аннулируется многочленом  $t^m$ , все его элементарные делители являются степенями  $t$ . В частности минимальный многочлен тоже является степенью  $t$ , и поскольку минимальный многочлен делит характеристический многочлен, степень которого равна  $\dim V$ , в определении нильпотентного оператора можно без ограничения общности считать, что  $m \leq \dim V$ . По [теор. 10.1](#) нильпотентный оператор изоморфен оператору умножения на класс  $[t]$  в прямой сумме фактор колец вида

$$\frac{\mathbb{k}[t]}{(t^{v_1})} \oplus \dots \oplus \frac{\mathbb{k}[t]}{(t^{v_k})} \tag{10-4}$$

и два таких оператора изоморфны друг другу если и только если выписанные в порядке нестрогого убывания наборы показателей  $v_1 \geq v_2 \geq \dots \geq v_k$  у них одинаковы. Таким образом, нильпотентные операторы над произвольным полем  $\mathbb{k}$  взаимно однозначно соответствуют диаграммам Юнга  $\nu$ . Диаграмма  $\nu(F)$ , характеризующая нильпотентный оператор  $F$ , называется его *цикловым типом*.

Умножение на класс  $[t]$  действует на состоящий из векторов  $e_i = [t^{m-i}]$  базис пространства  $\mathbb{k}[t]/(t^m)$  по правилу<sup>1</sup>

$$0 \leftarrow e_1 \leftarrow e_2 \leftarrow e_3 \leftarrow \dots \leftarrow e_{m-1} \leftarrow e_m$$

и задаётся в этом базисе матрицей

$$J_m(0) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

которая называется *нильпотентной жордановой клеткой* размера  $m$ . Тем самым, для нильпотентного оператора  $F$  циклового типа  $\nu(F)$  в пространстве  $V$  имеется базис, векторы которого размещаются по клеткам диаграммы  $\nu(F)$  так, что  $F$  переводит каждый из них в левый соседний, а все векторы самого левого столбца — в нуль:

$\leftrightarrow$

$(10-5)$

Базис такого вида называется *циклическим* или *жордановым* базисом нильпотентного оператора  $F$ , а наборы базисных векторов, стоящие по строкам диаграммы, называются *жордановыми цепочками*. Так как сумма длин первых  $m$  столбцов диаграммы  $\nu(F)$  равна  $\dim \ker F^m$ , длина  $m$ -того столбца диаграммы  $\nu(F)$  равна  $\dim \ker F^m - \dim \ker F^{m-1}$ .

**Упражнение 10.9.** В условиях [прим. 10.1](#) на стр. 134 покажите, что для отыскания жордановой нормальной формы оператора  $F$  над алгебраически замкнутым полем достаточно разложить характеристический многочлен  $\chi_F(t)$  на линейные множители:

$$\chi_F(t) = \prod_{\lambda \in \text{Spec } F} (t - \lambda)^{m_\lambda}$$

<sup>1</sup>См. формулу (10-2) на стр. 135.

и для каждого  $\lambda \in \text{Spec } F$  и натурального  $k$  в пределах  $1 \leq k \leq m_\lambda$ , где  $m_\lambda$  — кратность корня  $\lambda$ , вычислить<sup>1</sup>  $\dim \ker(\lambda \text{Id} - F)^k$ , после чего построить диаграмму Юнга  $\nu$ , в которой  $k$ -й столбец имеет длину  $\dim \ker(\lambda \text{Id} - F)^k - \dim \ker(\lambda \text{Id} - F)^{k-1}$ . Количество жордановых клеток размера  $m$  с заданным собственным значением  $\lambda$  в жордановой нормальной форме оператора  $F$  равно количеству строк длины  $m$  в диаграмме Юнга  $\nu$ .

**10.2.2. Полупростые операторы.** Прямая сумма простых<sup>2</sup> пространств с операторами называется *полупростым* или *вполне приводимым* пространством с оператором.

Предложение 10.2

Следующие свойства оператора  $F : V \rightarrow V$  эквивалентны друг другу:

- 1)  $V$  является прямой суммой неприводимых  $F$ -инвариантных подпространств
- 2)  $V$  линейно порождается неприводимыми  $F$ -инвариантными подпространствами
- 3) для каждого ненулевого  $F$ -инвариантного подпространства  $U \subsetneq V$  существует такое  $F$ -инвариантное подпространство  $W \subset V$ , что  $V = U \oplus W$
- 4) оператор  $F$  подобен умножению на класс  $[t]$  в прямой сумме фактор колец

$$\mathbb{k}[t]/(p_1) \oplus \mathbb{k}[t]/(p_2) \oplus \cdots \oplus \mathbb{k}[t]/(p_r),$$

где  $p_i \in \mathbb{k}[t]$  приведены и неприводимы<sup>3</sup> (но не обязательно различны).

Доказательство. Импликация (1)  $\Rightarrow$  (2) очевидна. Покажем, что (2)  $\Rightarrow$  (3). Индукция по  $\dim V$ . При  $\dim V = 1$  доказывать нечего. Пусть  $\dim V > 1$ . Для каждого неприводимого  $F$ -инвариантного подпространства  $L \subset V$  пересечение  $L \cap U$ , будучи  $F$ -инвариантным подпространством в  $L$ , либо нулевое, либо совпадает с  $L$ . Если все неприводимые инвариантные подпространства  $L \subset V$  лежат в  $U$ , то  $U = V$  в силу (2), и доказывать нечего. Если есть ненулевое неприводимое  $F$ -инвариантное подпространство  $L \subset V$  с  $L \cap U = 0$ , рассмотрим фактор  $V' = V/L$  и проекцию  $\pi : V \rightarrow V'$  с ядром  $L$ . Она инъективно отображает подпространство  $U \subset V$  на ненулевое  $F$ -инвариантное подпространство  $\pi(U) \subset V'$ . Поскольку  $\dim V' < \dim V$ , по индукции найдётся такое  $F$ -инвариантное подпространство  $W' \subset V'$ , что  $V' = W' \oplus \pi(U)$  (при  $\pi(U) = V'$  мы полагаем  $W' = 0$ ). Пусть  $W = \pi^{-1}(W') \subset V$ . Проверим, что  $V = U + W$ . Проекция любого  $v \in V$  на  $V'$  представляется в виде  $\pi(v) = \pi(u) + w'$  с  $u \in U, w' \in W'$ , и разность  $w = v - u \in W$ , поскольку  $\pi(w) = \pi(v) - \pi(u) = w' \in W'$ . Тем самым,  $v = w + u$  с  $w \in W, u \in U$ . Если вектор  $v \in U \cap W$ , то  $\pi(v) \in \pi(U) \cap W' = 0$ , откуда  $v \in \ker \pi = L$ . Так как  $L \cap U = 0$ , мы заключаем, что  $U \cap W = 0$  и  $V = W \oplus U$ .

Чтобы доказать импликацию (3)  $\Rightarrow$  (4), покажем сначала, что если свойство (3) выполнено для пространства  $V$ , то оно выполнено и для каждого  $F$ -инвариантного подпространства  $H \subset V$ . Рассмотрим любое инвариантное подпространство  $U \subset H$  и отыщем в  $V$  такие инвариантные

<sup>1</sup>Причём это вычисление достаточно продолжать только до тех пор, пока  $\dim \ker(\lambda \text{Id} - F)^k$  строго увеличивается с ростом  $k$ . Если при очередном  $k$  размерность останется такой же, как при предыдущем  $k$ , то она будет оставаться такой и для всех последующих  $k$ .

<sup>2</sup>Или — в другой терминологии — неприводимых, см. начало н° 10.1 на стр. 132.

<sup>3</sup>Иными словами, в прямой сумме (10-1) из теор. 10.1 все показатели степеней  $m_i = 1$ .

подпространства  $Q$  и  $R$ , что  $V = H \oplus Q = U \oplus Q \oplus R$ . Рассмотрим проекцию  $\pi : V \rightarrow H$  с ядром  $Q$  и положим  $W = \pi(R)$ .

УПРАЖНЕНИЕ 10.10. Проверьте, что  $H = U \oplus W$ .

Итак, если свойство (3) выполнено для прямой суммы фактор колец (10-1) из теор. 10.1, то оно выполнено и для каждого слагаемого этой суммы. Однако по сл. 10.2 при  $m > 1$  пространство  $\mathbb{k}[t]/(p^m)$  приводимо, но неразложимо.

Импликация (4)  $\Rightarrow$  (1) также немедленно вытекает из сл. 10.2.  $\square$

СЛЕДСТВИЕ 10.5 (из доказательства ПРЕДЛ. 10.2)

Ограничение полупростого оператора на инвариантное подпространство также является полупростым оператором.

**10.2.3. Циклические векторы.** Вектор  $v \in V$  называется *циклическим вектором* линейного оператора  $F : V \rightarrow V$ , если его  $F$ -орбита  $v, Fv, F^2v, F^3v, \dots$  линейно порождает пространство  $V$  над полем  $\mathbb{k}$ . Иначе можно сказать, что  $v$  порождает модуль  $V_F$  над  $\mathbb{k}[t]$ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10.3

Следующие свойства оператора  $F : V \rightarrow V$  эквивалентны друг другу:

- 1)  $F$  обладает циклическим вектором
- 2)  $F$  подобен умножению на класс  $[t]$  в фактор кольце  $\mathbb{k}[t]/(f)$ , где  $f \in \mathbb{k}[t]$  — какой-либо приведённый многочлен
- 3) каждый неприводимый  $p \in \mathbb{k}[t]$  встречается в  $\mathcal{E}l F$  не более одного раза
- 4) минимальный многочлен оператора  $F$  совпадает с характеристическим.

Доказательство. Условия (3) и (4) эквивалентны в силу предл. 10.1 и означают, что оператор  $F$  подобен умножению на  $t$  в прямой сумме фактор колец

$$\mathbb{k}[t]/(p_1^{m_1}) \oplus \mathbb{k}[t]/(p_2^{m_2}) \oplus \dots \oplus \mathbb{k}[t]/(p_r^{m_r}),$$

в которой все неприводимые приведённые многочлены  $p_1, p_2, \dots, p_r$  попарно различны. По китайской теореме об остатках, эта сумма изоморфна  $\mathbb{k}[t]/(f)$ , где

$$f = \chi_F = \mu_F = \prod_{i=1}^r p_i^{m_i}.$$

Тем самым, (2) равносильно (3) и (4). Импликация (2)  $\Rightarrow$  (1) очевидна: в качестве циклического вектора для оператора умножения на  $t$  в фактор кольце  $\mathbb{k}[t]/(f)$  можно взять  $v = [1]$ . Наоборот, если модуль  $V_F$  порождается над  $\mathbb{k}[t]$  одним вектором  $v$ , то  $V_F = \mathbb{k}[t]/R$ , где  $R = \ker \pi$  — ядро  $\mathbb{k}[t]$ -линейного эпиморфизма  $\mathbb{k}[t] \rightarrow V_F$ , переводящего 1 в  $v$ . Поскольку  $\mathbb{k}[t]$  — кольцо главных идеалов, модмодуль  $R \subset \mathbb{k}[t]$  имеет вид  $(f)$ , где  $f$ -приведённый многочлен наименьшей степени со свойством  $f(F)v = 0$ . Тем самым,  $V = \mathbb{k}[t]/(f)$ .  $\square$



**10.2.4. Собственные подпространства и собственные числа.** Максимальное по включению ненулевое подпространство в  $V$ , на котором оператор  $F : V \rightarrow V$  действует как умножение на скаляр  $\lambda \in \mathbb{k}$ , называется *собственным подпространством* оператора  $F$  с *собственным числом* или *собственным значением*  $\lambda$  и обозначается

$$V_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid F(v) = \lambda v\} = \ker(\lambda \text{Id}_V - F).$$

Ненулевые векторы  $v \in V_\lambda$  называются *собственными векторами* оператора  $F$  с собственным числом<sup>1</sup>  $\lambda$ .

**Предложение 10.4**

Любой набор собственных векторов с попарно различными собственными числами линейно независим.

**Доказательство.** Пусть собственные векторы  $v_1, \dots, v_m$  имеют попарно разные собственные числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  и линейно зависимы. Рассмотрим линейное соотношение между ними, в котором задействовано минимально возможное число векторов. Пусть это будут векторы  $e_1, \dots, e_k$ . Тогда  $k \geq 2$  и  $e_k = x_1 e_1 + \dots + x_{k-1} e_{k-1}$ , где все  $x_i \in \mathbb{k}$  отличны от нуля. При этом  $\lambda_k e_k = F(e_k) = \sum x_i F(e_i) = \sum x_i \lambda_i e_i$ . Вычитая из этого равенства предыдущее, умноженное на  $\lambda_k$ , получаем более короткую линейную зависимость

$$0 = x_1(\lambda_1 - \lambda_k) \cdot e_1 + x_2(\lambda_2 - \lambda_k) \cdot e_2 + \dots + x_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) \cdot e_{k-1}$$

с ненулевыми коэффициентами. □

**Следствие 10.6**

Сумма ненулевых собственных подпространств с попарно разными собственными числами является прямой. □

**10.2.5. Спектр.** Множество собственных чисел линейного оператора  $F : V \rightarrow V$ , т. е. всех таких  $\lambda \in \mathbb{k}$ , для которых существует ненулевое собственное подпространство  $V_\lambda = \ker(\lambda \text{Id}_V - F)$ , называется *спектром*<sup>2</sup> оператора  $F$  в поле  $\mathbb{k}$  и обозначается

$$\text{Spec } F = \{\lambda \in \mathbb{k} \mid \ker(\lambda \text{Id}_V - F) \neq 0\} = \{\lambda \in \mathbb{k} \mid \det(tE - F) = 0\}.$$

Поскольку  $\ker(\lambda \text{Id}_V - F) \neq 0$  если и только если  $\det(tE - F) = 0$ , спектр совпадает с множеством корней характеристического многочлена  $\chi_F(t) = \det(tE - F)$  в поле  $\mathbb{k}$ . В частности, количество различных собственных чисел не превосходит  $\deg \chi_F = \dim V$ , что также вытекает из [сл. 10.6](#), согласно которому

$$\sum_{\lambda \in \text{Spec } F} \dim V_\lambda \leq \dim V. \quad (10-6)$$

**Упражнение 10.11.** Покажите, что  $\text{Spec } F$  содержится в множестве корней любого многочлена, аннулирующего  $F$ .

Если известен спектр  $F$ , отыскание собственных подпространств сводится к решению систем линейных однородных уравнений  $(\lambda \text{Id}_V - F)v = 0$ , которые гарантированно имеют ненулевые решения при  $\lambda \in \text{Spec } F$ . Если основное поле  $\mathbb{k}$  алгебраически замкнуто, спектр любого оператора гарантированно не пуст, поскольку характеристический многочлен  $\chi_F(t)$  обязательно имеет корень в поле  $\mathbb{k}$ .

<sup>1</sup>Или собственным значением.

<sup>2</sup>Ср. с [прим. 10.1](#) на стр. 134.

## Предложение 10.5

Над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  любой оператор обладает хотя бы одним ненулевым собственным подпространством.  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 10.12. Покажите, что над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  оператор  $F$  нильпотентен если и только если когда  $\text{Spec } F = \{0\}$ , и приведите пример оператора, для которого неравенство (10-6) строгое.

**10.2.6. Диагонализуемые операторы.** Оператор  $F : V \rightarrow V$  называется *диагонализуемым*, если в  $V$  имеется базис, в котором  $F$  записывается диагональной матрицей. Такой базис состоит из собственных векторов оператора  $F$ , а элементы диагональной матрицы суть собственные числа  $F$ , причём каждое собственное число  $\lambda \in \text{Spec } F$  встречается на диагонали ровно столько раз, какова кратность корня  $t = \lambda$  в характеристическом многочлене  $\chi_F(t)$  и какова размерность собственного подпространства  $V_\lambda$ . Иначе можно сказать, что диагонализуемый оператор  $F$  подобен оператору умножения на класс  $[t]$  в прямой сумме фактор колец<sup>1</sup>  $\mathbb{k}[t]/(t - \lambda) \simeq \mathbb{k}$ , где  $\lambda$  пробегает  $\text{Spec } F$ , и каждое такое прямое слагаемое представлено в сумме ровно  $\dim V_\lambda$  раз.

## Предложение 10.6

Следующие свойства линейного оператора  $F : V \rightarrow V$  эквивалентны:

- 1)  $F$  диагонализуем
- 2) пространство  $V$  линейно порождается собственными векторами оператора  $F$
- 3) характеристический многочлен  $\chi_F(t) = \det(tE - F)$  полностью раскладывается в  $\mathbb{k}[t]$  на линейные множители, и кратность каждого его корня  $\lambda$  равна размерности собственного подпространства  $V_\lambda$
- 4) все элементарные делители  $F$  имеют вид  $(t - \lambda)$ ,  $\lambda \in \mathbb{k}$
- 5) оператор  $F$  аннулируется многочленом  $f$ , раскладывающимся в  $\mathbb{k}[t]$  в произведение попарно различных линейных множителей.

Доказательство. Эквивалентности (2)  $\iff$  (1)  $\iff$  (4) и импликация (1)  $\Rightarrow$  (3) очевидны из предваряющего [предл. 10.6](#) обсуждения. Эквивалентность (4)  $\iff$  (5) следует из [сл. 10.3](#). Из (3) вытекает, что  $\sum \dim V_\lambda = \deg \chi_F = \dim V$ . Поэтому прямая по [сл. 10.6](#) сумма всех различных собственных подпространств  $V_\lambda$  совпадает с  $V$ , что даёт импликацию (3)  $\Rightarrow$  (1).  $\square$

## Следствие 10.7

Если оператор  $F : V \rightarrow V$  диагонализуем, то его ограничение на любое инвариантное подпространство тоже диагонализуемо на этом подпространстве.

Доказательство. Это вытекает из свойства (5) [предл. 10.6](#).  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 10.13. Убедитесь, что над алгебраически замкнутым полем диагонализуемость равносильна полупростоте.

<sup>1</sup>Ср. с [упр. 10.7](#) на стр. 135.

**10.2.7. Перестановочные операторы.** Если линейные операторы  $F, G : V \rightarrow V$  на векторном пространстве  $V$  над произвольным полем  $\mathbb{k}$  коммутируют друг с другом, то ядро и образ любого многочлена от оператора  $F$  переводятся оператором  $G$  в себя, поскольку

$$\begin{aligned} f(F)v = 0 &\Rightarrow f(F)Gv = Gf(F)v = 0 \\ v = f(F)w &\Rightarrow Gv = Gf(F)w = f(F)Gw. \end{aligned}$$

В частности, все собственные подпространства  $V_\lambda = \ker(F - \lambda E)$  инвариантны относительно любого перестановочного с  $F$  оператора  $G$ .

**Предложение 10.7**

В конечномерном векторном пространстве  $V$  над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  любое множество коммутирующих друг с другом операторов обладает общим для всех операторов собственным вектором. Над произвольным полем  $\mathbb{k}$  любое множество коммутирующих друг с другом диагонализуемых операторов на  $V$  можно одновременно диагонализировать в одном общем для всех операторов базисе.

**Доказательство.** Индукция по  $\dim V$ . Если все операторы скалярны (что так при  $\dim V = 1$ ), то доказывать нечего — подойдут, соответственно, любой ненулевой вектор и любой базис. Если среди операторов есть хоть один нескялярный оператор  $F$ , то над замкнутым полем у него есть собственное подпространство строго меньшей размерности, чем  $V$ , а в диагонализуемом случае  $V$  является прямой суммой таких собственных подпространств. Каждое собственное подпространство оператора  $F$  инвариантно для всех операторов, причём если операторы диагонализуемы на всём пространстве, то их ограничения на собственные подпространства оператора  $F$  останутся диагонализуемыми по [сл. 10.7](#). Применяя к собственным подпространствам оператора  $F$  предположение индукции, получаем требуемое.  $\square$

**Пример 10.2 (конечные группы операторов)**

Если  $m$  линейных операторов на конечномерном пространстве  $V$  над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  характеристики  $\text{char } \mathbb{k} > m$  образуют группу  $G$ , то каждый из этих операторов аннулируется многочленом  $t^m - 1$ , который раскладывается в произведение  $m$  попарно различных линейных множителей<sup>1</sup>. Поэтому каждый оператор в группе  $G$  диагонализуем. Все операторы из группы  $G$  одновременно диагонализуются в одном общем базисе если и только если группа  $G$  абелева.

**10.2.8. Аннулирующие многочлены.** Если задан многочлен  $f \in \mathbb{k}[x]$ , аннулирующий линейный оператор<sup>2</sup>  $F : V \rightarrow V$ , и известно, как  $f$  раскладывается в  $\mathbb{k}[t]$  на простые множители, то в силу [сл. 10.3](#) это оставляет лишь конечное число возможностей для набора элементарных делителей  $\mathcal{E}_\ell(F)$  и часто позволяет явно описать разложение  $V$  в прямую сумму  $F$ -инвариантных подпространств во внутренних терминах действия  $F$  на пространстве  $V$ .

**Пример 10.3 (инволюции)**

Линейный оператор  $\sigma : V \rightarrow V$  называется *инволюцией*, если он удовлетворяет соотношению  $\sigma^2 = \text{Id}_V$ , т. е. аннулируется многочленом  $t^2 - 1$ . Тожественная инволюция  $\sigma = \text{Id}_V$  называется

<sup>1</sup>Поскольку производная  $mt^{m-1}$  многочлена  $t^m - 1$  отлична от нуля и взаимно проста с этим многочленом, она не имеет с ним общих корней. Следовательно, у многочлена нет кратных корней.

<sup>2</sup>В силу тождества Гамильтона–Кэли по крайней мере один такой многочлен, а именно — характеристический многочлен  $\chi_F(t) = \det(tE - F)$ , всегда можно явно предъявить.

тривиальной. Так как  $t^2 - 1 = (t + 1)(t - 1) = 0$  является произведением различных линейных множителей, все инволюции диагонализуемы, причём спектр любой инволюции исчерпывается числами  $\pm 1$ . Пространство  $V$  с инволюцией  $\sigma$  распадается в прямую сумму собственных подпространств  $V = V_+ \oplus V_-$  с собственными значениями  $\pm 1$ , и любой вектор  $v \in V$  однозначно представим в виде  $v = v_+ + v_-$ , где  $v_+ = (v + Fv)/2 \in V_+ = \ker(\sigma - \text{Id}_V) = \text{im}(\sigma + \text{Id}_V)$  и  $v_- = (v - Fv)/2 \in V_- = \ker(\sigma + \text{Id}_V) = \text{im}(\sigma - \text{Id}_V)$ .

**ТЕОРЕМА 10.2 (ТЕОРЕМА О РАЗЛОЖЕНИИ)**

Пусть линейный оператор  $F : V \rightarrow V$  на произвольном<sup>1</sup> векторном пространстве  $V$  над любым полем  $\mathbb{k}$  аннулируется многочленом  $q \in \mathbb{k}[t]$ , который раскладывается в  $\mathbb{k}[t]$  в произведение  $q = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_r$  попарно взаимно простых многочленов  $q_i \in \mathbb{k}[t]$ . Положим  $Q_j = q/q_j$ . Тогда  $\ker q_j(F) = \text{im } Q_j(F)$  для каждого  $j$ , все эти подпространства  $F$ -инвариантны, и пространство  $V$  является прямой суммой тех из них, что отличны от нуля.

**Доказательство.** Так как  $q(F) = q_i(F) \circ Q_j(F) = 0$ , имеем включение  $\text{im } Q_j(F) \subset \ker q_i(F)$ . Поэтому достаточно показать, что  $V$  линейно порождается образами операторов  $Q_i(F)$ , а сумма ядер  $\ker q_i(F)$  прямая<sup>2</sup>, т. е.  $\ker q_i(F) \cap \sum_{j \neq i} \ker q_j(F) = 0$  для всех  $i$ . Первое вытекает из того, что  $\text{нод}(Q_1, \dots, Q_r) = 1$ , а значит, существуют такие  $h_1, \dots, h_r \in \mathbb{k}[t]$ , что  $1 = \sum Q_j(t)h_j(t)$ . Подставляя в это равенство  $t = F$  и применяя обе части к произвольному вектору  $v \in V$ , получаем разложение  $v = Ev = \sum Q_j(F)h_j(F)v \in \sum \text{im } Q_j(F)$ . Второе вытекает из взаимной простоты  $q_i$  и  $Q_i$ , в силу которой существуют такие  $g, h \in \mathbb{k}[t]$ , что  $1 = g(t) \cdot q_i(t) + h(t) \cdot Q_i(t)$ . Подставим сюда  $t = F$  и применим обе части полученного равенства  $E = g(F)q_i(F) + h(F) \circ Q_i(F)$  к произвольному вектору  $v \in \ker q_i(F) \cap \sum_{j \neq i} \ker q_j$ . Так как  $\ker q_j(F) \subset \ker Q_i(F)$  при всех  $j \neq i$ , получим  $v = Ev = g(F)q_i(F)v + h(F)Q_i(F)v = 0$ , что и требовалось.  $\square$

**ПРИМЕР 10.4 (ПРОЕКТОРЫ)**

Линейный оператор  $\pi : V \rightarrow V$  называется *идемпотентом* или *проектором*, если он аннулируется многочленом  $t^2 - t = t(t - 1)$ , т. е. удовлетворяет соотношению  $\pi^2 = \pi$ . По **теор. 10.2** образ любого идемпотента  $\pi : V \rightarrow V$  совпадает с подпространством его неподвижных векторов:  $\text{im } \pi = \ker(\pi - \text{Id}_V) = \{v \mid \pi(v) = v\}$ , и всё пространство распадается в прямую сумму  $V = \ker \pi \oplus \text{im } \pi$ . Тем самым, оператор  $\pi$  проектирует  $V$  на  $\text{im } \pi$  вдоль  $\ker \pi$ . Отметим, что оператор  $\text{Id}_V - \pi$  тоже является идемпотентом и проектирует  $V$  на  $\ker \pi$  вдоль  $\text{im } \pi$ . Таким образом, задание прямого разложения  $V = U \oplus W$  равносильно заданию пары идемпотентных эндоморфизмов  $\pi_1 = \pi_1^2$  и  $\pi_2 = \pi_2^2$  пространства  $V$ , связанных соотношениями  $\pi_1 + \pi_2 = 1$  и  $\pi_1\pi_2 = \pi_2\pi_1 = 0$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 10.14.** Выведите из этих соотношений, что  $\ker \pi_1 = \text{im } \pi_2$  и  $\text{im } \pi_1 = \ker \pi_2$ .

**Предложение 10.8**

Над полем вещественных чисел  $\mathbb{R}$  любой оператор обладает одномерным или двумерным инвариантным подпространством.

**Доказательство.** Пусть  $\chi_F = q_1 q_2 \dots q_m$ , где  $q_i \in \mathbb{R}[t]$  — неприводимые приведённые линейные или квадратичные многочлены, не обязательно различные. Применим нулевой оператор

<sup>1</sup>Возможно даже бесконечномерном.

<sup>2</sup>См. **предл. 6.1** на стр. 81.

$0 = q_1(F) \circ q_2(F) \circ \dots \circ q_m(F)$  к какому-нибудь ненулевому вектору  $v \in V$ . Тогда при некотором  $i \geq 0$  мы получим такой ненулевой вектор  $w = q_{i+1}(F) \circ \dots \circ q_m(F)v$ , что  $q_i(F)w = 0$ . Если  $q_i(t) = t - \lambda$  линейен, то  $F(w) = \lambda w$ , и мы имеем 1-мерное  $F$ -инвариантное подпространство  $\mathbb{k} \cdot w$ . Если  $q_i(t) = t^2 - \alpha t - \beta$  квадратичен, то  $F(Fw) = \alpha F(w) + \beta w$  лежит в линейной оболочке векторов  $w$  и  $Fw$ , которая тем самым является  $F$ -инвариантным подпространством, и её размерность не превышает 2.  $\square$

**10.3. Корневое разложение и функции от операторов.** Всюду в этом разделе мы предполагаем, что линейный оператор  $F : V \rightarrow V$  аннулируется многочленом, который полностью разлагается над полем  $\mathbb{k}$  на линейные множители. Для этого необходимо и достаточно, чтобы полностью разлагался на линейные множители минимальный или характеристический многочлен оператора  $F$ . Спектр такого оператора  $F$  исчерпывается степенями линейных двучленов  $(t - \lambda)^m$  с  $\lambda \in \text{Spec } F$  и произвольными  $m \in \mathbb{N}$ , причём как числа  $\lambda$ , так и числа  $m$  могут повторяться. Подмодуль  $(t - \lambda)$ -кращения в  $\mathbb{k}[t]$ -модуле  $V_F$  называется *корневым подпространством* оператора  $F$ , отвечающим собственному числу  $\lambda \in \text{Spec } F$ , и обозначается

$$K_\lambda = \{v \in V \mid \exists m \in \mathbb{N} : (\lambda \text{Id} - F)^m v = 0\} = \bigcup_{m \geq 1} \ker(\lambda \text{Id} - F)^m = \ker(\lambda \text{Id} - F)^{m_\lambda}, \quad (10-7)$$

где  $m_\lambda$  — максимальный из показателей степеней элементарных делителей оператора  $F$  вида  $(t - \lambda)^m$ . Каждое корневое подпространство  $K_\lambda$  содержит ненулевое собственное подпространство  $V_\lambda$  и тем самым отлично от нуля. Разложение  $\mathbb{k}[t]$ -модуля  $V_F$  в прямую сумму  $\mathbb{k}[t]$ -подмодулей  $(t - \lambda)$ -кращения из [сл. 9.3](#) на стр. 129 имеет вид  $V = \bigoplus_{\lambda \in \text{Spec } F} K_\lambda$  и называется *корневым разложением* оператора  $F$ .

**Следствие 10.8 (теорема о корневом разложении)**

Пусть характеристический многочлен  $\chi_F(t)$  линейного оператора  $F : V \rightarrow V$  на конечномерном векторном пространстве  $V$  над полем  $\mathbb{k}$  полностью разлагается в  $\mathbb{k}[t]$  на линейные множители:  $\chi_F(t) = \prod_{\lambda \in \text{Spec } F} (t - \lambda)^{m_\lambda}$ . Тогда  $V = \bigoplus_{\lambda \in \text{Spec } F} K_\lambda$ , причём  $K_\lambda = \ker(\lambda \text{Id} - F)^{m_\lambda}$  для всех  $\lambda \in \text{Spec } F$ .  $\square$

**Упражнение 10.15.** Выведите существование корневого разложения из [теор. 10.2](#) и тождества Гамильтона – Кэли без использования [сл. 9.3](#) и теоремы об элементарных делителях.

**10.3.1. Функции от операторов.** Пусть линейный оператор  $F$  действует на конечномерном векторном пространстве  $V$  над полем  $\mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ , которое мы обозначим через  $\mathbb{K}$ . Всюду далее мы предполагаем, что  $F$  аннулируется многочленом  $\alpha(t) \in \mathbb{K}[t]$ , который полностью разлагается над  $\mathbb{K}$  на линейные множители, т. е.

$$\alpha(t) = (t - \lambda_1)^{m_1} (t - \lambda_2)^{m_2} \dots (t - \lambda_s)^{m_s}, \quad (10-8)$$

где  $\lambda_i \neq \lambda_j$  при  $i \neq j$  и все  $m_i \in \mathbb{N}$ . В этом случае характеристический и минимальный многочлены оператора  $F$  тоже полностью разлагаются на линейные множители в  $\mathbb{K}[t]$ , и можно взять в качестве  $\alpha(t)$  один из них. Мы полагаем  $m = \deg \alpha = m_1 + \dots + m_s$ . Алгебра  $\mathcal{A}$ , состоящая из функций  $U \rightarrow \mathbb{K}$ , заданных на каком-нибудь подмножестве  $U \subset \mathbb{K}$ , содержащем все корни многочлена (10-8), называется *алгебраически вычислимой* на операторе  $F$ , если  $\mathbb{K}[t] \subset \mathcal{A}$  и для каждого корня  $\lambda$  кратности  $k$  многочлена (10-8) все функции  $f \in \mathcal{A}$  определены в точке  $\lambda \in \mathbb{K}$

вместе с первыми  $k - 1$  производными  $f^{(v)} = \frac{d^v f}{dt^v}$  и допускают разложение вида

$$f(t) = f(\lambda) + \frac{f'(\lambda)}{1!}(t - \lambda) + \dots + \frac{f^{(k-1)}(\lambda)}{(k-1)!}(t - \lambda)^{k-1} + g_\lambda(t) \cdot (t - \lambda)^k, \quad (10-9)$$

где функция  $g_\lambda(t)$  тоже лежит в алгебре  $\mathcal{A}$ .

Например, алгебра  $\mathcal{A}$  всех функций, определённых в  $\varepsilon$ -окрестности каждого собственного числа  $\lambda \in \text{Sp} F$  и представимых в ней суммой абсолютно сходящегося степенного ряда от  $(t - \lambda)$ , алгебраически вычислима на операторе  $F$ . Подалгебра в  $\mathcal{A}$ , состоящая из всех аналитических функций<sup>1</sup>  $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ , алгебраически вычислима на всех линейных операторах  $F \in \text{End}(V)$ , характеристические многочлены которых полностью разлагаются на линейные множители в  $\mathbb{K}[t]$ .

#### ТЕОРЕМА 10.3

В сделанных выше предположениях каждая алгебраически вычислимая на операторе  $F : V \rightarrow V$  алгебра функций  $\mathcal{A}$  допускает единственный такой гомоморфизм  $\mathbb{K}$ -алгебр  $\text{ev}_F : \mathcal{A} \rightarrow \text{End } V$ , что  $\text{ev}_F(p) = p(F)$  для всех многочленов  $p \in \mathbb{K}[t] \subset \mathcal{A}$ .

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.2 (гомоморфизм вычисления)

Гомоморфизм  $\text{ev}_F : \mathcal{A} \rightarrow \text{End } V$  из теор. 10.3 называется *вычислением* функций  $f \in \mathcal{A}$  на операторе  $F$ . Линейный оператор  $\text{ev}_F(f) : V \rightarrow V$ , в который переходит функция  $f \in \mathcal{A}$  при гомоморфизме вычисления, обозначается  $f(F)$  и называется *функцией  $f$  от оператора  $F$* .

**Замечание 10.1.** (как относиться к функциям от операторов) Из теор. 10.3 вытекает, что если характеристический многочлен линейного оператора  $F : V \rightarrow V$  полностью разлагается на линейные множители в  $\mathbb{K}[t]$ , то на пространстве  $V$  определены такие линейные операторы, как  $e^F$  или  $\sin F$ , а если  $F \in \text{GL}(V)$ , то и такие задаваемые аналитическими вне нуля функциями операторы, как  $\ln F$  или  $\sqrt{F}$ , причём алгебраические свойства всех этих операторов точно такие же, как у числовых функций  $e^t$ ,  $\sin t$ ,  $\ln t$  и  $\sqrt{t}$ . В частности, все эти функции от оператора  $F$  коммутируют друг с другом и с  $F$ , а также удовлетворяют соотношениям вроде  $\ln F^2 = 2 \ln F$  и  $\sqrt{F} \sqrt{F} = F$ . Таким образом, функции от операторов можно использовать для отыскания операторов с предписанными свойствами, например, для извлечения корней из невырожденных операторов.

**Доказательство теор. 10.3.** Пусть оператор  $F$  аннулируется многочленом  $\alpha(t) = \prod_\lambda (t - \lambda)^{m_\lambda}$ , где  $\lambda = \lambda_1, \dots, \lambda_r$  пробегает все различные корни этого многочлена, и пусть искомым гомоморфизм  $\text{ev}_F : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{K}$  существует. По теореме о разложении<sup>2</sup> пространство  $V$  является прямой суммой  $F$ -инвариантных подпространств  $K_\lambda = \ker(F - \lambda \text{Id})^{m_\lambda}$ , и согласно формуле (10-9) оператор

$$f(F) = f(\lambda) \cdot E + f'(\lambda) \cdot (F - \lambda E) + \dots + \frac{f^{(m_\lambda-1)}(\lambda)}{(m_\lambda-1)!} (F - \lambda E)^{m_\lambda-1} + g_\lambda(F) (F - \lambda E)^{m_\lambda} \quad (10-10)$$

действует на каждом подпространстве  $K_\lambda$  точно так же, как результат подстановки оператора  $F$  в многочлен

$$j_\lambda^{m_\lambda-1} f(t) \stackrel{\text{def}}{=} f(\lambda) + f'(\lambda) \cdot (t - \lambda) + \dots + f^{(m_\lambda-1)}(\lambda) \cdot (t - \lambda)^{m_\lambda-1} / (m_\lambda - 1)!,$$

<sup>1</sup>Т.е. функций, задаваемых сходящимися всюду в  $\mathbb{K}$  степенными рядами.

<sup>2</sup>См. теор. 10.2 на стр. 143.

класс которого в фактор кольце  $\mathbb{K}[t]/((t-\lambda)^{m_\lambda})$  называется  $(m_\lambda - 1)$ -струей функции  $f \in \mathcal{A}$  в точке  $\lambda \in \mathbb{K}$ . По китайской теореме об остатках существует единственный такой многочлен  $p_{f(F)}(t) \in \mathbb{K}[t]$  степени меньше  $\deg \alpha(t)$ , что

$$p_{f(F)}(t) \equiv j_\lambda^{m_\lambda-1} f(t) \pmod{\alpha(t)}$$

для всех корней  $\lambda$  многочлена  $\alpha$ . Поскольку операторы  $p_{f(F)}(F)$  и  $f(F)$  одинаково действуют на каждом подпространстве  $K_\lambda$ , мы имеем равенство  $f(F) = p_{f(F)}(F)$ . Таким образом гомоморфизм вычисления единствен. Остаётся убедиться, что отображение  $f \mapsto p_{f(F)}(F)$  действительно является гомоморфизмом  $\mathbb{K}$ -алгебр. Проверим сначала, что отображение

$$J: \mathcal{A} \rightarrow \frac{\mathbb{K}[t]}{((t-\lambda_1)^{m_1})} \times \cdots \times \frac{\mathbb{K}[t]}{((t-\lambda_r)^{m_r})} \simeq \frac{\mathbb{K}[t]}{(\alpha)} \quad (10-11)$$

$$f \mapsto \left( j_{\lambda_1}^{m_1-1} f, \dots, j_{\lambda_r}^{m_r-1} f \right),$$

сопоставляющее функции  $f \in \mathcal{A}$  набор её струй<sup>1</sup> во всех корнях многочлена  $\alpha$ , является гомоморфизмом  $\mathbb{K}$ -алгебр, т. е.  $\mathbb{K}$ -линейно и удовлетворяет равенству  $J(fg) = J(f)J(g)$ . Первое очевидно, второе достаточно установить для каждой струи  $j_\lambda^{m-1}$  отдельно. Используя правило Лейбница:  $(fg)^{(k)} = \sum_{v=0}^k \binom{k}{v} f^{(v)} g^{(k-v)}$ , получаем следующие равенства по модулю  $(t-\lambda)^m$ :

$$j_\lambda^{m-1}(fg) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t-\lambda)^k}{k!} \sum_{v+\mu=k} \frac{k!}{v!\mu!} f^{(v)}(\lambda) g^{(\mu)}(\lambda) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{v+\mu=k} \frac{f^{(v)}(\lambda)}{v!} (t-\lambda)^v \cdot \frac{g^{(\mu)}(\lambda)}{\mu!} (t-\lambda)^\mu \equiv j_\lambda^{m-1}(f) j_\lambda^{m-1}(g).$$

Отображение  $f \mapsto P_{f(F)}(F)$  является композицией гомоморфизма (10-11) с гомоморфизмом вычисления многочленов  $\text{ev}_F: \mathbb{K}[t] \rightarrow \text{End } V$ ,  $p \mapsto p(F)$ , который корректно пропускается через фактор  $\mathbb{K}[t]/(\alpha)$ , так как  $\alpha(F) = 0$ .  $\square$

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.3 (ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ МНОГОЧЛЕН)

Многочлен  $p_{f(F)}(t) \in \mathbb{K}[t]$ , принимающий на операторе  $F$  то же самое значение, что и функция  $f \in \mathcal{A}$ , называется *интерполяционным многочленом* для вычисления  $f(F)$ . Он однозначно определяется тем, что в каждом корне  $\lambda$  кратности  $m$  аннулирующего оператор  $f$  многочлена  $\alpha$  многочлен  $p_{f(F)}(t)$  и первые его  $m-1$  производные принимают те же значения, что и функция  $f$  и её  $m-1$  производные, т. е. многочлен  $p_{f(F)}(t)$  решает интерполяционную задачу с кратными узлами из [прим. 6.13](#) на стр. 92. Если  $\deg \alpha = n$ , отыскание коэффициентов интерполяционного многочлена  $p_{f(F)}$  сводится к решению системы из  $n$  линейных уравнений на  $n$  неизвестных.

### ПРИМЕР 10.5 (СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ И РЕКУРРЕНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ)

Задача отыскания  $n$ -того члена  $a_n$  числовой последовательности  $z: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $n \mapsto z_n$ , решающей рекуррентное уравнение  $z_n = \alpha_1 z_{n-1} + \alpha_2 z_{n-2} + \cdots + \alpha_m z_{n-m}$  с начальным условием

<sup>1</sup>Мы рассматриваем этот набор как элемент прямого произведения соответствующих колец вычетов, которое по китайской теореме об остатках изоморфно фактору кольца  $\mathbb{K}[t]/(\alpha)$ .

$(z_0, \dots, z_{n-1}) = (a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ , сводится вычислению  $n$ -той степени матрицы сдвига

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_m \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & \alpha_{m-1} \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \alpha_2 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha_1 \end{pmatrix}$$

сдвигающей каждый фрагмент из  $m$  последовательных элементов на один шаг вправо:

$$(z_{k+1}, z_{k+2}, \dots, z_{k+m}) \cdot S = (z_{k+2}, z_{k+3}, \dots, z_{k+m+1}),$$

так что член  $a_n$  оказывается равным первой координате вектора

$$(a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+m-1}) = (a_0, a_1, \dots, a_{m-1}) \cdot S^n.$$

Матрица  $S^n = p_{S^n}(S)$  является результатом подстановки матрицы  $S$  в интерполяционный многочлен  $p_{S^n}(t) \in \mathbb{K}[t]$  для вычисления на матрице  $S$  степенной функции  $f(t) = t^n$ . Обратите внимание, что  $\deg p_{S^n} < m$ , и коэффициенты многочлена  $p_{S^n}$  находятся решением системы из  $m$  линейных уравнений на  $m$  неизвестных.

Например, для уравнения Фибоначчи  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$  матрица сдвига

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Интерполяционный многочлен для вычисления степенной функции  $t^n$  на этой матрице линеен. Записывая его в виде  $p_{S^n}(t) = at + b$  с неопределёнными коэффициентами  $a$  и  $b$ , получаем

$$S^n = aS + bE = \begin{pmatrix} b & a \\ a & a+b \end{pmatrix}.$$

В частности,  $n$ -тое число Фибоначчи, решающее уравнение Фибоначчи с начальным условием  $(a_0, a_1) = (0, 1)$ , равно первой координате вектора  $(a_n, a_{n+1}) = (0, 1) \cdot S^n = (a, a+b)$ . Матрица  $S$  аннулируется своим характеристическим многочленом

$$\chi_S(t) = t^2 - t \operatorname{tr} S + \det S = t^2 - t - 1 = (t - \lambda_+)(t - \lambda_-)$$

с однократными корнями  $\lambda_{\pm} = (1 \pm \sqrt{5})/2$ . Функция  $t^n$  принимает на них значения  $\lambda_{\pm}^n$ . Коэффициенты  $a$  и  $b$  находятся из системы

$$\begin{cases} a\lambda_+ + b = \lambda_+^n \\ a\lambda_- + b = \lambda_-^n, \end{cases}$$

и по правилу Крамера первый из них  $a = (\lambda_+^n - \lambda_-^n)/(\lambda_+ - \lambda_-)$ . Тем самым,

$$a_n = a = \frac{\left((1 + \sqrt{5})/2\right)^n - \left((1 - \sqrt{5})/2\right)^n}{\sqrt{5}}.$$



**Замечание 10.2.** Имеются различные аналитические способы продолжения гомоморфизма вычисления многочленов на матрице  $F \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$  с алгебры  $\mathbb{C}[z]$  на большие алгебры функций  $\mathcal{C} \supset \mathbb{C}[z]$ . А именно, пространства  $\mathbb{C}[z]$  и  $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$  наделяются той или иной топологией, и функция  $f \in \mathcal{C}$  представляется в виде предела  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$  какой-нибудь последовательности многочленов  $(f_n)$ . Матрица  $f(F)$  полагается равной пределу последовательности матриц  $f_n(F) \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ . Разумеется, при этом необходимо проверять, что предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(F) \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$  существует и зависит только от функции  $f$ , а не от выбора сходящейся к  $f$  последовательности многочленов  $(f_n)$ . Отдельно необходимо проверить, что возникающее таким образом отображение  $\text{ev}_F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbb{C}), f \mapsto f(F)$ , является гомоморфизмом алгебр<sup>1</sup>. Однако, как бы ни определялась сходимость в пространстве функций и какой бы ни была сходящаяся к функции  $f$  последовательность многочленов  $(f_n)$ , последовательность матриц  $f_n(F)$  всегда лежит в конечномерном векторном пространстве, линейно порождённом над  $\mathbb{C}$  степенями  $F^m$  с  $0 \leq m < \dim n$ , и если переход к пределу в пространстве матриц перестановочен со сложением и умножением на константы<sup>2</sup>, то предел последовательности матриц  $(f_n(F))$  неминуемо является многочленом от  $F$  степени, строго меньшей  $n$ . Это означает, что какая бы аналитическая процедура не применялась для построения гомоморфизма  $\text{ev}_F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ , значение этого гомоморфизма на заданной функции  $f \in \mathcal{C}$  *a priori* вычисляется по указанному нами рецепту. Отметим также, что если матрицы  $F$  и  $G$  подобны, т. е.  $G = CFC^{-1}$  для некоторой матрицы  $C \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ , то и аналитически определённые функции от них подобны: поскольку равенство  $f_n(G) = Cf_n(F)C^{-1}$  выполнено для всех многочленов, приближающих функцию  $f$ , оно останется выполненным и для предельной функции:  $f(G) = Cf(F)C^{-1}$ , при условии, что топология на пространстве  $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$  такова, что все  $\mathbb{C}$ -линейные отображения  $\text{Mat}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbb{C})$  непрерывны.

**10.4. Разложение Жордана.** Этот раздел является уточнением [прим. 10.1](#) на стр. 134. Всюду далее речь идёт об операторах на конечномерном векторном пространстве  $V$  над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$ .

**ТЕОРЕМА 10.4 (РАЗЛОЖЕНИЕ ЖОРДАНА)**

Для каждого оператора  $F$  на конечномерном векторном пространстве  $V$  над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  существует единственная пара таких операторов  $F_d$  и  $F_n$ , что  $F_n$  нильпотентен,  $F_d$  диагонализуем,  $F_d F_n = F_n F_d$  и  $F = F_d + F_n$ . Кроме того, операторы  $F_d$  и  $F_n$  являются многочленами от оператора  $F$  с нулевыми свободными членами.

**Доказательство.** Пусть  $\text{Spes } F = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ . В силу алгебраической замкнутости поля  $\mathbb{k}$ , характеристический многочлен оператора  $F$  полностью разлагается на линейные множители:  $\chi_F(t) = \prod_i (t - \lambda_i)^{m_i}$ , а пространство  $V$  является прямой суммой корневых подпространств:  $V = \bigoplus_i K_i$ , где  $K_i = \ker(F - \lambda_i \text{Id})^{m_i}$ . В качестве диагонализуемого оператора  $F_d$  можно взять оператор, действующий на каждом корневом подпространстве  $K_\lambda$  умножением на  $\lambda$ , а в качестве нильпотентного оператора  $F_n$  взять разность  $F_n = F - F_d$ , которая действует на каждом

<sup>1</sup>В качестве упражнения по анализу читателю настоятельно рекомендуется попробовать самостоятельно реализовать намеченную программу, используя на пространстве функций топологию, в которой сходимость последовательности функций означает равномерную сходимость в каждом круге в  $\mathbb{C}$ , а на пространстве  $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$  — стандартную топологию пространства  $\mathbb{C}^{n^2}$ , где сходимость определяется по координатно.

<sup>2</sup>Т. е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda F_n + \mu G_n) = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} F_n + \mu \lim_{n \rightarrow \infty} G_n$ .

корневом подпространстве  $K_\lambda$  нильпотентным оператором  $F - \lambda \text{Id}$ . Покажем, что оба эти оператора являются многочленами без свободного члена от  $F$ . Для этого достаточно представить в таком виде оператор  $F_d$ .

Так как многочлены  $(t - \lambda_i)^{m_i}$  попарно взаимно просты, по китайской теореме об остатках существуют такие многочлены  $f_1, \dots, f_r \in \mathbb{k}[t]$ , что

$$f_i(t) \equiv \begin{cases} 1 \pmod{(t - \lambda_i)^{m_i}} \\ 0 \pmod{(t - \lambda_j)^{m_j}} \text{ при } j \neq i. \end{cases}$$

Если  $\lambda_i \neq 0$ , то многочлен  $t$  обратим по модулю  $(t - \lambda_i)^{m_i}$ . Поэтому найдётся такой многочлен  $g_i(t)$ , что  $t \cdot g_i(t) \equiv \lambda_i \pmod{(t - \lambda_i)^{m_i}}$ . Если  $\lambda_i = 0$ , то положим  $g_i(t) = 0$ . Тогда при каждом  $i$  многочлен  $p_s(t) \stackrel{\text{def}}{=} t \sum_{j=1}^r g_j(t) f_j(t) \equiv \lambda_i \pmod{(t - \lambda_i)^{m_i}}$  и не имеет свободного члена. Из этих

сравнений вытекает, что оператор  $F_d \stackrel{\text{def}}{=} p_s(F)$  действует на каждом корневом подпространстве  $K_i = \ker(F - \lambda_i \text{Id})^{m_i}$  как умножение на  $\lambda_i$  и, стало быть, равен  $F_d$ . Будучи многочленами от  $F$ , операторы  $F_d$  и  $F_n = F - F_d$  перестановочны между собою и с  $F$ . Это доказывает существование операторов  $F_d$  и  $F_n$  с требуемыми свойствами, включая последнее утверждение предложения.

Докажем их единственность. Пусть есть ещё одно разложение  $F = F'_s + F'_n$ , в котором  $F'_d$  диагоналізуем,  $F'_n$  нильпотентен и  $F'_d F'_n = F'_n F'_d$ . Из последнего равенства вытекает, что  $F'_d$  и  $F'_n$  перестановочны с любым многочленом от  $F = F'_s + F'_n$  и, в частности, с построенными выше  $F_d$  и  $F_n$ . Поэтому каждое собственное подпространство  $V_\lambda$  оператора  $F_d$  переводится оператором  $F'_d$  в себя<sup>1</sup>, причём  $F'_d$  диагоналізуем<sup>2</sup> на каждом  $V_\lambda$ . Если бы оператор  $F'_d$  имел на  $V_\lambda$  собственный вектор с собственным значением  $\mu \neq \lambda$ , то этот вектор был бы собственным для оператора  $F_n - F'_n = F_d - F'_d$  с собственным значением  $\lambda - \mu \neq 0$ , что невозможно, так как оператор  $F_n - F'_n$  нильпотентен.

**УПРАЖНЕНИЕ 10.16.** Докажите, что разность двух перестановочных нильпотентных операторов нильпотентна.

Следовательно, оператор  $F'_s$  действует на каждом собственном подпространстве  $V_\lambda$  оператора  $F_d$  как умножение на  $\lambda$ , откуда  $F'_d = F_d$ . Тогда и  $F'_n = F - F'_s = F - F_d = F_n$ .  $\square$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.4**

Операторы  $F_d$  и  $F_n$  из **теор. 10.4** называются, соответственно, *диагонализующей* и *нильпотентной* составляющими оператора  $F$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 10.3.** Поскольку операторы  $F_d$  и  $F_n$  являются многочленами от  $F$ , каждое  $F$ -инвариантное подпространство  $U \subset V$  является инвариантным для  $F_d$  и  $F_n$ .

**Предложение 10.9**

В условиях **теор. 10.3** на стр. 145 для любой функции  $f$  из алгебраически вычислимой на операторе  $F$  алгебры функций  $\mathcal{A}$  спектр оператора  $f(F)$  состоит из чисел  $f(\lambda)$ , где  $\lambda \in \text{Спекс } F$ . Если  $f'(\lambda) \neq 0$ , то элементарные делители  $(t - \lambda)^m \in \mathcal{E}\ell(F)$  биективно соответствуют элементарным делителям  $(t - f(\lambda))^m \in \mathcal{E}\ell(f(F))$ . Если  $f'(\lambda) = 0$ , то элементарные делители вида  $(t - \lambda)^m \in \mathcal{E}\ell(F)$ , имеющие  $m > 1$ , распадаются в объединения элементарных делителей  $(t - f(\lambda))^\ell \in \mathcal{E}\ell(f(F))$ , имеющих  $\ell < m$ .

<sup>1</sup>См. н° 10.2.7 на стр. 142.

<sup>2</sup>См. сл. 10.7 на стр. 141.

Доказательство. Реализуем  $F$  как оператор умножения на класс  $[t]$  в прямой сумме фактор колец

$$V = \frac{\mathbb{C}[t]}{(t - \lambda_1)^{s_1}} \oplus \dots \oplus \frac{\mathbb{C}[t]}{(t - \lambda_r)^{s_r}}.$$

Из доказательства теор. 10.3 вытекает, что диагональная и нильпотентная составляющие ограничения оператора  $f(F)$  на корневое подпространство  $K_\lambda$  суть  $f_s(F) = f(\lambda) \cdot \text{Id}$  и

$$f_n(F) = f'(\lambda) \cdot \eta + \frac{1}{2} f''(\lambda) \cdot \eta^2 + \dots,$$

где  $\eta$  обозначает нильпотентный оператор умножения на класс  $(t - \lambda)$ . На каждом слагаемом  $\mathbb{C}[t]/((t - \lambda)^k)$  оператор  $\eta$  имеет ровно одну жорданову цепочку максимальной длины  $k$ . Если  $f'(\lambda) \neq 0$ , то  $f_n^{k-1}(F) = f'(\lambda)^{k-1} \cdot \eta^{k-1} \neq 0$ . Поэтому  $f_n(F)$  тоже имеет ровно одну жорданову цепочку длины  $k$ . При  $f'(\lambda) = 0$  и  $m > 1$  равенство  $f_n^m(F) = 0$  наступит при  $m < k$ . Поэтому цикловой тип ограничения  $f_n(F)$  на  $\mathbb{C}[t]/((t - \lambda)^k)$  состоит из нескольких цепочек длины  $< k$ .

□

Упражнение 10.17. Покажите, что матрица  $J_n^{-1}(\lambda)$ , обратная к жордановой клетке размера  $n \times n$  с собственным числом  $\lambda$ , подобна матрице  $J_n(\lambda^{-1})$ .

### Ответы и указания к некоторым упражнениям

- Упр. 10.1. Если отождествить  $\mathbb{R}[t]/(t^2+1)$  с полем  $\mathbb{C}$ , отправив классы  $[1]$  и  $[t]$  в  $1$  и  $i$  соответственно, умножение на класс  $[t]$  превратится в умножение на  $i$ , т. е. в поворот на угол  $\pi/2$ , который не переводит никакое одномерное векторное подпространство в себя.
- Упр. 10.2. Пусть  $\mathbb{k}[t]/(t^n) = U \oplus W$ , где  $U$  и  $W$  переводятся в себя умножением на  $[t]$ . Оба этих подпространства не могут целиком содержаться в образе оператора умножения на  $[t]$ , так как иначе их сумма тоже бы в нём содержалась. Поэтому в одном из них, пусть это будет  $U$ , имеется класс  $[g]$  многочлена  $g$  с ненулевым свободным членом. Тогда классы  $[t^{n-1}g], \dots, [tg], [g] \in U$  выражаются через базис  $[1], [t], \dots, [t^{n-1}]$  пространства  $\mathbb{k}[t]/(t^n)$  при помощи верхнетреугольной матрицы, на диагонали которой всюду стоит ненулевой свободный член многочлена  $g$ . Следовательно, эти классы тоже образуют базис в  $\mathbb{k}[t]/(t^n)$ , и значит, содержащее их подпространство  $U$  совпадает со всем пространством  $\mathbb{k}[t]/(t^n)$ .
- Упр. 10.3. Разложите каждое пространство  $(F|_{U_i}, U_i)$  по форм. (10-1) на стр. 133. В силу единственности такого разложения прямая сумма полученных разложений является разложением исходного пространства  $(F, V)$ .
- Упр. 10.4. В согласованном с разложением в прямую сумму базисе матрица  $tE - F$  имеет блочно диагональный вид  $\begin{pmatrix} tE - G & 0 \\ 0 & tE - H \end{pmatrix}$ . С другой стороны, для любых матриц  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{k}), C \in \text{Mat}_m(\mathbb{k}), B \in \text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{k})$  определитель  $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det A \cdot \det C$  согласно формуле для разложения определителя по первым  $n$  столбцам.
- Упр. 10.5. Пусть  $f = t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_{n-1} t + a_n$ . Напишите матрицу  $F$  оператора умножения на класс  $[t]$  в фактор кольце  $\mathbb{k}[x]/(f)$  в базисе  $[t^{n-1}], [t^{n-2}], \dots, [t], [1]$  и разложите  $\det(tE - F)$  по первому столбцу.
- Упр. 10.6. Поскольку умножение на произведение всех элементарных делителей полностью аннулирует прямую сумму форм. (10-1) на стр. 133, оператор  $\chi_F(F)$  нулевой для любого оператора  $F$  над любым полем  $\mathbb{k}$ . Поскольку теорема Гамильтона-Кэли для матрицы  $A$  представляет собою набор тождеств между многочленами с целыми коэффициентами от элементов матрицы  $A$ , достаточно убедиться в её справедливости для всех матриц с рациональными элементами, т. е. для любого оператора над полем  $\mathbb{Q}$ .
- Упр. 10.8. Векторы  $g_i \in \mathbb{k}^n$  вычисляются рекурсивно по формулам  $g_{m-1} = h_m, g_{i-1} = h_i + A g_i$  при  $i \leq m-1$ . Остаток  $r = h_0 + F_v g_0 = h_0 + F_v(h_1 + F_v g_1) = h_0 + F_v(h_1 + A(h_2 + F_v g_2)) = \dots = h_0 + h_1 F_v + \dots + h_m F_v^m$  имеет степень 0 по  $t$  и тоже лежит в  $\mathbb{k}^n$ .
- Упр. 10.10. Так как любой вектор  $h \in H$  представляется в  $V$  как  $h = u + q + r$  с  $u \in U, q \in Q, r \in R$ , в  $U$  выполняется равенство  $h = \pi(h) = \pi(u) + \pi(r)$ , в котором  $\pi(u) = u \in U$  и  $\pi(r) \in W$ , т. е.  $U+W = H$ . Если  $u \in U \cap W$ , то  $u = \pi(r)$  для некоторого  $r \in R$ , и  $\pi(u-r) = \pi(u) - \pi(r) = u - u = 0$ , откуда  $u - r \in \ker \pi = Q$ , что возможно только при  $u = r = 0$ . Поэтому  $U \cap W = 0$ .
- Упр. 10.11. Если  $\lambda \in \text{Spec } F$  и  $g(\lambda) \neq 0$ , то  $g(F)$  действует на ненулевом собственном подпространстве  $V_\lambda$  умножением на ненулевое число  $g(\lambda)$ . Тем самым,  $g(F) \neq 0$ .
- Упр. 10.12. Над алгебраически замкнутым полем всякий многочлен имеющий только один корень 0 равен  $t^m$ . Поэтому  $\chi_F(t) = t^m$  и по теореме Гамильтона-Кэли  $F^m = 0$ .

Упр. 10.15. Разложение характеристического многочлена оператора  $F$  в виде произведения степеней попарно разных линейных форм  $\chi_F(t) = \prod_{\lambda \in \text{Spec } F} (t - \lambda)^{N_\lambda}$  удовлетворяет условиям ?? с

$q_i = (t - \lambda)^{N_\lambda}$ , а корневые подпространства  $K_\lambda = \ker(\lambda \text{Id} - F)^{N_\lambda}$ .

Упр. 10.16. Если  $a^n = 0$ ,  $b^m = 0$  и  $ab = ba$ , то  $(a - b)^{m+n-1} = 0$  по формуле Ньютона.

Упр. 10.17. Над полем  $\mathbb{C}$  можно применить предл. 10.9. Над произвольным полем  $\mathbb{k}$  оператор  $F$  с матрицей  $J_n(\lambda)$  имеет вид  $\lambda \text{Id} + N$ , где  $N^n = 0$ , но  $N^{n-1} \neq 0$ . Обратный оператор

$$F^{-1} = (\lambda \text{Id} + N)^{-1} = \lambda^{-1}(\text{Id} + N/\lambda)^{-1} = \lambda^{-1} - \lambda^{-2}N + \lambda^{-3}N^2 - \dots + (-1)^{n-1}\lambda^{-n}N^{n-1}$$

имеет вид  $\lambda^{-1}\text{Id} + M$ , где оператор  $M = -\lambda^{-2}N(1 - \lambda^{-1}N + \dots)$  тоже имеет  $M^n = 0$ , а  $M^{n-1} = \lambda^{2(1-n)}N^{n-1} \neq 0$ . Таким образом, ЖНФ оператора  $F^{-1}$  это одна клетка  $J_n(\lambda^{-1})$ .