Лекция 26 ноября (вторая половина)

Следствие: Матрица C обратима $\Leftrightarrow$ $\det C$ обратим в K и в этом случае

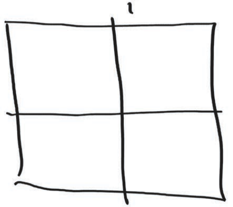
$$C^{-1} = \frac{1}{\det(C)} \cdot C^{\vee}$$

присоединённая матрица к C

$C^{\vee} = (c^{\vee}_{ij})$ $\quad c^{\vee}_{ij} = (-1)^{i+j} \det C_{ji}$

буквы переставились.

$C_{ji} =$



получается из C вычёркиванием креста с центром в клетке (ji).

$(-1)^{i+j} \det C_{ji}$ наз. алгебраическим дополнением к элементу c_{ji} матрицы C

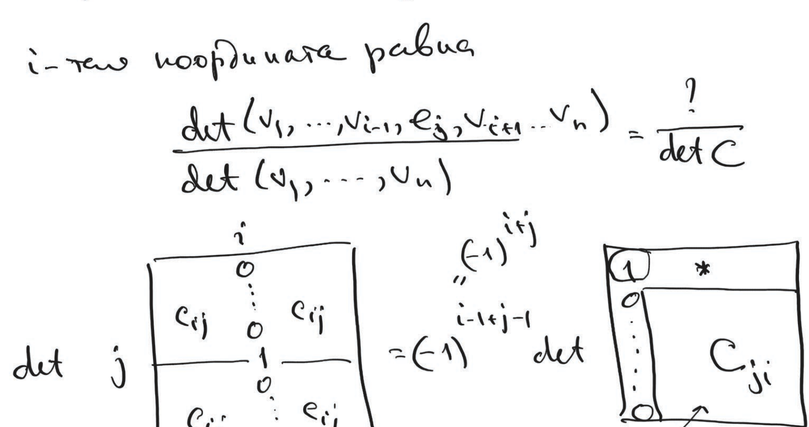
если матрица C обратима, то $\det C$ тоже обратим в K, и столбцы $v_1,\dots,v_n$ матрицы C образуют базис в K^n. Стандартный базис через него выражается как раз при помощи матрицы C^{-1}!

$$(v_1 \dots v_n) = (e_1 \dots e_n)\cdot C$$
$$(e_1 \dots e_n) = (v_1 \dots v_n)\cdot C^{-1}$$

j-тый столбец матрицы C^{-1} состоит из координат вектора e_j в базисе $v_1,\dots,v_n$

i-тая координата равна

$$\frac{\det(v_1,\dots,v_{i-1},e_j,v_{i+1}\dots v_n)}{\det(v_1,\dots,v_n)} = \frac{?}{\det C}$$



матрица, полученная из C вычёркиванием j-той строки и i-того столбца.

$g: 1 \mapsto 1$

$$= (-1)^{i+j}\det C_{ji} = c_{ij}^{\vee}$$

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C} C^{\vee}$$

$$C^{-1}C = E = C \cdot C^{-1} \rightsquigarrow \boxed{C^{\vee}C = CC^{\vee} = \det C \cdot E}$$

это формальное
буквенное тождество

Рассмотрим кольцо $K = \mathbb{Z}[\dots c_{ij} \dots]$

многочлены с целыми коэффициентами от

n^2 переменных c_{ij}

$$C = (c_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$$

тогда в $\mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ имеет место

тождество $\boxed{C \cdot C^{\vee} = C^{\vee} \cdot C = \det C \cdot E.}$

сравним матричные элементы.

n^2 полиномиальных равенств.

$C^{\vee}C - \det C \cdot E = 0$ это n^2 полиномиальных равенств

Наблюдение: если поле $\mathbb{K}$ бесконечно, то

$f(x_1, \dots, x_n) = 0$ для $\forall f \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$

достаточно проверить его во всех точках $\mathbb{R}^n$.

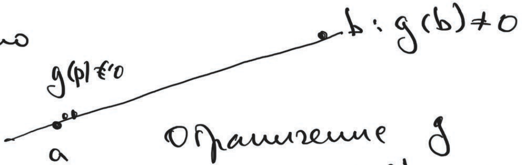
Т.к. f непрерывен, то достаточно проверить на всюду плотном множестве в $\mathbb{R}^n$

Наблюдение: $\forall \overset{\neq 0}{g} \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$

множество $D(g) = \{p \in \mathbb{R}^n \mid g(p) \neq 0\}$

дополнение до поверхности $g = 0$

всюду плотно



На (ab) $g(p) = 0$ для конечного множества точек $p \in (ab)$ $\Leftarrow$ Ограничение g на прямую (ab) — это ненулевой многочлен от одной переменной

Равенство $\boxed{C^\vee C = C C^\vee = \det C \cdot E}$

достаточно проверить для вещественных матриц C с $\det C \neq 0$.

$f(x_1, \dots, x_n) = 0$ для

достаточно проверить его во всех точках $\mathbb{R}^n$.

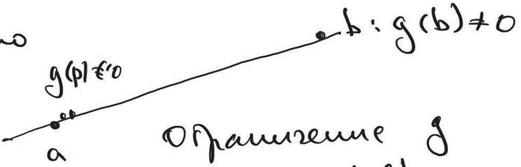
Т.к. f непрерывен, то достаточно проверить на всюду плотном множестве в $\mathbb{R}^n$

Наблюдение: $\forall \overset{\neq 0}{g} \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$

множество $D(g)=\{p\in\mathbb{R}^n \mid g(p)\neq 0\}$

дополнение до поверхности $g=0$

всюду плотно



Ограничение g на прямую (ab) — это ненулевой многочлен от одной переменной

на (ab) $g(p)=0$ для конечного множества точек $p\in(ab)$ $\Leftarrow$ ненулевой многочлен от одной переменной

Равенство $\boxed{C^{\vee}C = CC^{\vee} = \det C\cdot E}$

достаточно проверить для вещественных матриц C с $\det C \neq 0$.

Для таких матриц $\boxed{C^{-1}=\frac{1}{\det C}\cdot C^{\vee}}$

Тождество Гамильтона – Кэли

$K = \mathbb{Z}[\dots c_{ij} \dots]$, $C = (c_{ij})$

в $Mat_{n\times n}(K[t])$ рассмотрим

матрицу $tE - C$

$$\chi_C(t) = \boxed{\det(tE - C)} \in K[t]$$

характеристический многочлен матрицы C.

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_m t^m =$$

$$= a_0 \cdot t^0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_m t^m$$

$$t^0 = 1$$

можно вместо t подставить любую матрицу C

$$f(C) = a_0 \cdot \overset{C^0}{\overset{\shortparallel}{E}} + a_1 \cdot C + a_2 C^2 + \dots + a_m C^m$$

$$C^0 \overset{def}{=} E$$

Теорема: $\chi_C(C) = 0$ в $Mat_n(\underset{\mathbb{Z}[\dots c_{ij} \dots]}{\underset{\shortparallel}{K}})$

$$\det(tE - C) = \det \begin{pmatrix} t - c_{11} & & -c_{ij} & \\ & t - c_{22} & & \\ -c_{ij} & & \ddots & \\ & & & t - c_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= t^n - \sigma_1(C)t^{n-1} + \sigma_2(C)t^{n-2} - \sigma_3(C)t^{n-3} + \ldots + \underline{\underline{(-1)}}^n\sigma_n(C)$$

$$\sigma_1(C) = \mathrm{tr}(C) = c_{11} + c_{22} + \ldots + c_{nn}$$

$$\sigma_n(C) = \det C$$

$\sigma_k(C) =$ сумма главных диагональных $k\times k$ миноров =

= сумма определителей всех $k\times k$ подматриц в C, у которых главная диагональ содержится в главной диагонали C

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

$$\chi_C(t) = t^3 - (c_{11} + c_{22} + c_{33})t^2 + t\cdot\left(c_{11}c_{22} - c_{21}c_{12} + c_{22}c_{33} - c_{23}c_{32} + c_{11}c_{33} - c_{13}c_{31}\right) - \det C$$

Замечание: $\mathrm{Mat}_n(K[t]) = \underset{\uparrow}{\mathrm{Mat}_n(K)[t]}$

многочлены с матричными коэфф-тами.

$$\mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z}[t])$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} t^3+t+1 & 3t^2-5 \\ t^3+t^2-4 & t+t^3 \end{pmatrix} =$$

$$= t^3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

с многочленами из $\mathrm{Mat}_n(K)[t]$ можно делать обычные вещи:

- подставить вместо t матрицу из $\mathrm{Mat}_n(K)$
- любой многочлен можно поделить столбиком на любой многочлен с обратимым старшим к-том (например на $t-A$)

$$\begin{array}{l|l} B_n t^n + B_{n-1} t^{n-1} + \ldots & t-A \\ \cline{2-2} B_n t^n - B_n A t^{n-1} & B_n t^{n-1} \end{array}$$

в остатке будет матрица

$$b(t) = q(t)\cdot(t-A) + R$$

подставить $t = A$

$$R = b(A)$$

Док-во теоремы Гамильтона-Кэли.

$$(tE - C)(tE - C)^{\vee} = \det(tE - C)\cdot E$$

$\downarrow$ в силу тождества $\boxed{A\cdot A^{\vee} = \det A\cdot E}$

запишем обе части как многочлены от t с коэфф-тами в матрицах из $\mathrm{Mat}_n(K)$

$$(tE - C)(t^{m}B_m + t^{m-1}B_{m-1} + \dots) =$$

$$= t^{n}E - t^{n-1}\cdot\sigma_1(C)\cdot E + t^{n-2}\sigma_2(C)\cdot E$$

числа из K.

$\downarrow$

подставим $t = C$

$$0 = C^{n}\cdot E - \sigma_1(c)C^{n-1}\cdot E + \sigma_2(c)C^{n-2}\cdot E =$$

$$= \chi_C(C)\cdot E$$

$$\Downarrow$$

$$\chi_C(C) = 0$$