Лекция 19 ноября (первая половина)

$v = (v_1, \dots, v_n)$ - строка из векторов $v_i \in M$

$w = (w_1, \dots, w_m)$ - строка из векторов $w_i \in M$ - модуль над K

$v \in \mathrm{Span}(w_1, \dots, w_m)$

$\mathrm{Mat}_{m \times n}(K)$

$\in$

$$\underline{\underline{v = w C_{wv}}} \qquad (v_1 \dots v_n) = (w_1 \dots w_m) \cdot C_{wv}$$

в j-том столбце матрицы стоят коэф-ты разложения вектора v_j по векторам w

$$\overbrace{w = u \cdot C_{uw}}$$

$$v = u \underbrace{C_{uw} C_{wv}}_{C_{uv}}$$

$$F : N \longrightarrow M$$

$$u = (u_1 \dots u_n) \qquad (w_1 \dots w_m) = w$$

$$\underbrace{Fu = (Fu_1 \dots Fu_n) = (w_1 \dots w_m) \cdot F_{wu}} \qquad Fu = w F_{wu}$$

$$\underset{=}{w} = w' \cdot C_{w'w} \qquad u' = u C_{uu'}$$

$$Fu' = F(u \underset{\substack{\uparrow \\ \text{матрица чисел}}}{C_{uu'}}) = F(u) C_{uu'} = \underset{=}{w} F_{wu} C_{uu'} =$$

$$= w' \underbrace{C_{w'w} F_{wu} C_{uu'}}$$

$$= \boxed{\overline{F_{w'u'} = C_{w'w} F_{wu} C_{uu'}}^{\,F_{w'u'}}} =$$

Опр. Квадратная матрица $C \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ наз. обратимой, если $\exists\, A$ и B:

$$AC = E = CB \quad (\text{автоматически } A = B)$$

$$A = AE = ACB = EB = B$$

$C^{-1} := A = B$ наз. обратной к C.

Утв. Если F – свободный модуль с базисом $e_1, \dots, e_n$, то векторы $v_1, \dots, v_n \in F$ образуют базис $\Leftrightarrow C_{ev}$ обратима

$v = eC_{ev}$ ← по столбцам стоят координаты векторов v

Пусть C_{ev} обратима. $v = eC_{ev}$

$\downarrow$ C_{ev}^{-1} справа

векторы e линейно выражаются через v $\Leftarrow vC_{ev}^{-1} = e$ $\Rightarrow$ v порождают F над K.

$$(v_1, \dots, v_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \qquad vx = 0$$

$$\underbrace{eC_{ev}}_{} x = 0$$

умножаем слева на C_{ev}^{-1} $\longleftarrow$ $C_{ev}x=0$ базис v,

$x=0 \Leftarrow E\cdot x=0$

Наоборот, если векторы v образуют базис в F, то e можно через него выразить:

$$e=v\cdot C_{ve}=e\underline{C_{ev}}C_{ve}$$

$e=eE$ т.к. e это базис

$E=C_{ev}C_{ve} \Rightarrow C_{ev}$ обратима

$C_{ve}C_{ev}=E$

$$v=\underbrace{v\cdot C_{ve}}_{e}C_{ev}$$

Причина оговорки: Если F свободен, то $F\simeq K^n$ и изоморфизмы $\varphi: F\to \underline{\underline{K^n}}$ биективно соответствуют базисам в F

$e_1,\dots,e_n$ в F

$$v=e_1x_1+\dots+e_nx_n \xrightarrow{\varphi_e} (x_1,\dots,x_n)\in K^n$$

$$\varphi: F\xrightarrow{\sim}K^n$$

$$e_i=\varphi^{-1}(0\dots 0\underset{i}{1}0\dots 0)$$

Применительно к матрицам над полем

$\mathbb{k}$ - поле • $C \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{k})$ обратима

$\Updownarrow$

столбцы базис $\Leftrightarrow$ • столбцы C линейно независимы

$\Updownarrow$

столбцы базис $\Leftrightarrow$ • столбцы C порождают $\mathbb{k}^n$

Теорема о ранге: $\forall\ A = \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{k})$

линейная оболочка строк A в $\underline{\mathbb{k}^n}$ имеет ту же размерность, что и линейная оболочка столбцов A в $\underline{\mathbb{k}^m}$

Док-во: Линейная столбцов не меняет размерность при заменах $A \to CAD$, где C и D обратимы

$A \to AD$ столбцы AD - это линейные комбинации столбцов A

лин. оболочки столбцов $AD \subset$ лин. об. столбцов A

$A = (AD)\cdot D^{-1}$ умножение справа на обратимую матрицу лин. оболочку столбцов не меняет

A - матрица линейного отображения $F_A: \mathbb{k}^n \to \mathbb{k}^m$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x \longrightarrow Ax$$

в стандартном базисе

лин. оболочка столбцов $= \mathrm{im}(A)$

CA - это матрица того же самого отображения F_A в стандартном базисе $u_1, \dots, u_n$ пр-ва $\mathbb{k}^n$ и отличном от стандартного базиса $w_1, \dots, w_m \in \mathbb{k}^m$ базисе

$A = F_{wu}$

$$\begin{array}{c} CF_{wu} \\ \shortparallel \\ C_{w'w} \end{array}$$

$w' : w = w' \cdot C$

$$\boxed{\begin{array}{l} w' = w \cdot C^{-1} \\ C = C_{w'w} \\ C^{-1} = C_{ww'} \end{array}}$$

$$\boxed{F_{w'u} = C_{w'w} F_u}$$

размерность линейной оболочки столбцов - это по прежнему размерность линейной оболочки векторов $Fu_1, \dots Fu_n = \dim \mathrm{im} F_A$

$\Rightarrow$ заменив A на A^t: размерности линейных оболочек строк тоже не меняются при заменах $A \to CAD$, где C и D - обратимы

$$F_A : \mathbb{k}^n \longrightarrow \mathbb{k}^m$$

$$u = \underbrace{u_1 \dots u_k}_{\Downarrow}, \underbrace{u_{k+1} \dots u_n}_{\text{базис в } \ker F_A} \text{ — базис в } \mathbb{k}^n$$

$$w = \underbrace{Fu_1 \dots Fu_k}_{\text{базис в } \operatorname{im} F} w_{k+1} \dots w_m \text{ — базис в } \mathbb{k}^m$$

$$F_{wu} = \begin{array}{c} \\ k \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} \multicolumn{3}{c|}{k} & \\ 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \underset{\uparrow}{C} A \underset{\nwarrow}{D}$$

матрицы переходов к стандартным базисам

обе размерности $= k$

C и D обратимы

Алгебра над полем: векторное пр-во V над полем $\mathbb{k}$ с операцией "умножения"

$$V \times V \longrightarrow V \quad (a, b) \longrightarrow ab$$

которое линейно по каждому аргументу "билинейное"

$$(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)(\mu_1 w_1 + \mu_2 w_2) = \lambda_1 \mu_1 u_1 w_1 + \lambda_1 \mu_2 u_1 w_2 + \lambda_2 \mu_1 u_2 w_1 + \lambda_2 \mu_2 u_2 w_2$$

Ассоциативные алгебры с единицей $e \in V$

$$(ab)c = a(bc) \qquad ae = ea = a \quad \forall a \in V$$

Пример: квадратные $\overset{n\times n}{\text{матрицы}}$ $\mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$

↕

Эндоморфизмы векторного пр-ва

$$\mathrm{End}_{\Bbbk}(V) = \{F : V \to V\}$$

выбор базиса $e = (e_1 \dots e_n) \in V$ задаёт изоморфизм $\mathrm{End}_{\Bbbk}(V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$

$$F \longmapsto F_{ee} = F_e$$

Упр: проверить $(FG)_e = F_e G_e$

(частный случай формулы $C_{ab} = C_{ae} C_{eb}$)