Лекция 12 ноября (вторая половина)

Матрицы

$\mathcal{A}$ – множество

$$\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathcal{A}) = m\left\{\begin{array}{cc} j & \\ \underbrace{\begin{bmatrix} & | & \\ — & a_{ij} & — \\ & | & \end{bmatrix}}_{n} & i \end{array}\right. ,\ a_{ij}\in\mathcal{A}$$

кол-во строк

кол столбцов

$\mathcal{A}$ – это K-модуль, то $\mathrm{Mat}_{mn}(\mathcal{A})$ – это K-модуль относительно поэлементных операций $A=(a_{ij})$ $B=(b_{ij})$

$$S = A+B = (s_{ij}) \quad s_{ij} = a_{ij}+b_{ij}$$

$$P = x\cdot A = (p_{ij}) \quad p_{ij} = x\cdot a_{ij}$$

$$\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathcal{A}) \simeq \mathcal{A}^{mn}$$

Если есть билинейная операция умножения $\mathcal{A}\times\mathcal{B}\to\mathcal{C}$, $(a,b)\to ab\in\mathcal{C}$

$\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$ – K-модули билинейность

$$(x_1a_1+x_2a_2)\underline{(y_1b_1+y_2b_2)} =$$

$$= x_1y_1a_1a_2 + x_1y_2a_1b_2 + x_2y_1a_2b_1 + x_2y_2a_2b_2$$

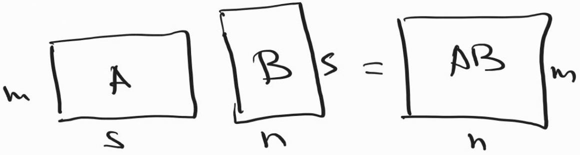
То можно умножать матрицы :

$\forall\, m, s, n \in \mathbb{N}$ имеется билинейное

умножение

$$\mathrm{Mat}_{m\times s}(A)\times \mathrm{Mat}_{s\times n}(B) \to$$

$$\to \mathrm{Mat}_{m\times n}(C)$$



$m=n=1$

$$(\Gamma)\ \underline{(a_1 \ldots a_s)\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix} = a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_sb_s}$$

При любых m, n $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$.

в матрице $C = AB = (c_{ij})$ элемент

$$c_{ij} = (a_{i1}\, a_{i2} \dots a_{is}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{sj} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik} b_{kj}$$

i-тая строчка в A

j-тый столбец в B.

если в (i) считать, что столбец b - это j-тый столбец матрицы B, а $a_1, \dots, a_s \in A^m$ столбцы матрицы A. $\Downarrow$

матрица AB имеет j-тым столбцом линейную комбинацию столбцов матрицы A взятых с коэф-тами из j-того столбца матрицы B.

$$A = \begin{array}{|c|c|c|}\hline a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline \end{array}$$ из 3х столбцов

$\Big\{$ умножением A справа на матрицу B

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline a_3 & a_2 + a_1 & a_3 + 2a_2 & a_1 + a_2 + a_3 \\ \hline \end{array}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

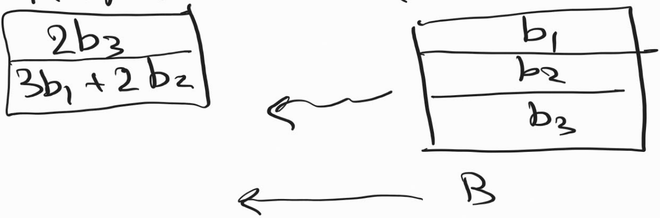
(!) Убедите себя, что такое определение умножения эквивалентно стандартному

$$(a_1 \ldots a_s) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix} = \sum a_i b_i$$

$a_1 \ldots a_s$ — это i-тая строка матрицы A

$b_1 \ldots b_s$ — это сами строки матрицы B
т.е. векторы из $\mathbb{B}^n$

i-тая строка в произведении AB — это линейная комбинация строк матрицы B с коэффициентами из i-той строки матрицы A. (Убедитесь в этом!!)



умножение
В слева на матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)(\mu_1 B_1 + \mu_2 B_2) = \sum_{i,j=1}^{2} \lambda_i \mu_j A_i B_j$$

Упр. на дом

$$\underbrace{A \quad \mathrlap{\overbrace{}^{Q}}B}_{P} \quad C$$

$A \times B \to P$ $\qquad$ $B \times C \to Q$

$P \times C \to Z$

$A \times Q \to Z$

если эти отображения ассоциативны, $\forall (a,b,c) \in A \times B \times C$

т.е. $(ab)c = a(bc)$

то и произведение матриц ассоциативно

$$\underbrace{(AB)}_{P}C = A\underbrace{(BC)}_{Q}$$

$(i\text{-}j)$-й элемент $= \sum_k p_{ik} c_{kj} = \sum_k \sum_m (a_{im} b_{mk}) c_{kj}$

$\|$

(i,j)-ый элемент $= \sum\limits_l a_{il} q_{lj} = \sum\limits_l a_{il} \sum\limits_n b_{ln} c_{nj}$

Ключевое применение — это "матрицы перехода" для линейных выражений одних векторов через другие.

Пусть векторы $u_1, \dots, u_k \in \mathrm{Span}(w_1, \dots, w_m)$

$$\begin{cases} u_{\underline{1}} = w_1 \cdot c_{1\underline{1}} + w_2 c_{2\underline{1}} + \dots + w_m c_{m\underline{1}} \\ u_2 = w_1 c_{12} + w_2 c_{22} + \dots + w_m c_{m2} \\ \dots \dots \qquad\qquad\qquad\qquad + w_m c_{mk} \\ u_k = w_1 c_{1k} + \dots \end{cases}$$

$$\overbrace{(u_1, \dots, u_k)}^{u} = \underline{\overbrace{(w_1, \dots, w_m)}^{w}} \cdot C_{wu}$$

$C_{wu} = (c_{ij})$ — матрица, в j-том столбце которой стоят к-ты линейного выражения вектора u_j через векторы $w_1 \dots w_m$

матрица перехода от векторов $\underline{u}$ к векторам $\underline{w}$

$v \in \mathrm{Span}(u)$ $\quad v = u_1x_1 + u_2x_2 + \dots + u_kx_k =$

$$= \underbrace{(u_1 \dots u_k)}_{u} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}}_{x} = u \cdot x$$

$$v = u \cdot x = \underline{\underline{w}} C_{wu} x$$

$v = w \cdot y$, где $y = C_{wu} x$.

$v = (v_1, \dots, v_n)$ $\quad u = (u_1 \dots u_k)$ $\quad w = (w_1 \dots w_m)$

$$v = u \cdot C_{uv} \qquad u = w \cdot C_{wu}$$

$$\Downarrow$$

$$v = u \cdot C_{uv} = w \cdot \underbrace{C_{wu} C_{uv}}_{\underbrace{C_{wv}}_{}}$$

$$\boxed{C_{wv} = C_{wu} C_{uv}}$$

Замечание: обозначение C_{wu} не вполне корректно в том смысле, что набор векторов $u_1 \dots u_k$ может иметь много разных линейных выраже-

ней через векторы $w_1,\dots,w_n$ если векторы w_i линейно зависимы.

$$\boxed{C_{wv}} = C_{wu} \cdot C_{uv}$$

какое-то из выражений векторов u через w

какое-то из выражений векторов v через u

гарантированно даст одно из разложений векторов v через векторы w.

если $w_1 \dots w_n$ — базис в M, то $\forall$ любого набора векторов $u_1 \dots u_k$ $\exists$ единственная матрица C_{wu}:

$$u = w \cdot C_{wu}$$

В частности если w — базис, то

$$C_{ww} = E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

если $u = u_1 \dots u_n$ — другой базис, то

$$C_{uw} C_{wu} = C_{uu} = E$$

$$C_{wu} C_{uw} = C_{ww} = E$$

$$\boxed{C_{uw} = C_{wu}^{-1}}$$ если u и w это базисы

Умножение матриц не коммутативно!

матрица $X \in Mat_{n\times n}(K)$

наз. обратимой, если $\exists A$ и B:

$$AX = E \quad \text{и} \quad X \cdot B = E.$$

(тогда автоматически

$$\underline{\underline{A}} = A \cdot E = A \cdot (X \cdot B) = (AX)B = EB = \underline{\underline{B}}$$

$$A = B := X^{-1}$$

Частный случай матриц перехода — матрицы линейных отображений

$$\varphi: M \longrightarrow N$$

M порождается векторами $w = (w_1, \dots, w_m)$

N порождается векторами $u = (u_1, \dots, u_n)$

φ однозначно задаётся набором образов образующих:

$$\underline{\underline{\varphi}}(w) = (\varphi(w_1), \varphi(w_2) \dots, \varphi(w_m)) =$$

$$= (u_1 \dots u_n) \cdot C_{u,\varphi w}$$

$$\|$$

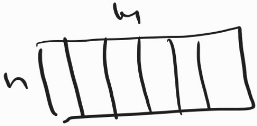
$$\longrightarrow \Phi_{u,w}$$

матрица отображения φ для систем образующих u и w в N и M

$$\varphi(w) = u \cdot \Phi_{uw}$$

в j-том столбце Φ_{uw} стоят к-ты разложения вектора $\varphi(u_j)$ через векторы $w_1, \dots, w_m$

$\Phi_{uw} =$



$u = u' \cdot C_{u'u}$

$w' = w \cdot C_{ww'}$

проверить эту формулу ↙

$$\boxed{\underset{\underset{\displaystyle C^{-1}_{uu}}{\shortparallel}}{C_{u'\underline{u}}}\, \Phi_{\underline{u}\,\underline{\underline{w}}}\, \underset{\underset{\displaystyle C^{-1}_{w'w}}{\shortparallel}}{C_{\underline{\underline{w}}w'}} = \Phi_{u'w'}}$$