Лекция 5 ноября (вторая половина)

Примеры свободных модулей:

- координатный модуль $K^m = \{(x_1, \dots, x_m) \mid x_i \in K\}$

аналог n-мерного координатного пр-ва над полем $\mathbb{K}$.

Базис: $e_i = (0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots 0)$

- модуль целозначных многочленов

$M_n \subset \mathbb{Q}[x]_{\leq n}$ ← многочлены с рац. к-тами степени $\leq n$

$\mathbb{Z}$-подмодуль, состоящий из всех $f(x)$: $\deg f \leq n$, $f(z) \in \mathbb{Z}$ $\forall z \in \mathbb{Z}$.

$$f(x) = \frac{x(x+1)}{2}$$

$$\gamma_0(x) \equiv 1, \gamma_1(x) = x+1, \dots, \gamma_k(x) = \binom{x+k}{k} = \frac{(x+1)(x+2)\dots(x+k)}{k!}$$

Задача: $\gamma_0, \dots, \gamma_n$ составляют базис M_n над $\mathbb{Z}$.

Подсказка: Рассмотреть действие на M_n разностного оператора $\nabla: f(x) \to \underline{f(x)-f(x-1)}$

$$\Delta: f(x) \to f(x+1)-f(x)$$

$\nabla^m f = 0$ при $m \gg 0$.

Теорема: K – комм. кольцо с 1, M – унитальный K-модуль. Если M свободен, то все базисы в M равномощны

Опр: # эл-тов в базисе называется **рангом** модуля M.

Идея: свести дело к случаю векторного пр-ва

1 шаг Если $I < K$ – идеал в K, то можно рассмотреть K-подмодуль $IM < M$

$$IM = \left\{ x_1 a_1 + \ldots + x_n a_n \;\middle|\; \begin{array}{l} x_i \in I \\ a_i \in M \\ n \in \mathbb{N} \end{array} \right\}$$

Отступление: $\forall$ подмодуля $N \subset M$ (любого модуля M) можно образовать фактор-модуль M/N = множество классов $[a]_N$: $[a]_N = [b]_N \Leftrightarrow a - b \in N$

[$\forall$ двух абелевых групп $A \subset B$ можно устроить фактор группу $B/A = \{[b] \mid$

$[b] = b + A$ $\qquad [b_1] = [b_2] \Leftrightarrow b_1 - b_2 \in A\}$

$[b_1]_A + [b_2]_A \overset{\text{def}}{=} [b_1 + b_2]_A$

корректно!]

Для модулей $N \subset M$

$x \cdot [a]_N = [x \cdot a]_N$ – корректно определено

$a_1 = a + n$

$x \cdot a_1 = x \cdot a + \boxed{xn} \in N$

2 шаг если M свободен, то

$$M = \underbrace{K \oplus K \oplus \ldots \oplus K} = K^n$$

$e_1, \dots, e_n$ – базис в M

$a = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \longmapsto (x_1, \dots, x_n)$

это изоморфизм между M и K^n.

Замечание: базисы свободного модуля M находятся в биекции с изоморфизмами

$$M \xrightarrow{\sim} K^n$$

$$M \xrightarrow[\sim]{\varphi} K^n$$

$v_i = \varphi^{-1}(e_i)$ – базис в M.

Возьмём любой? максимальный? идеал $\mathfrak{m} \subset K$

$K/\mathfrak{m}$ – поле $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{m}$ максимален по включению в множестве собственных идеалов.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{m}M \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, phantom, "\cap" rotate=90] & \mathfrak{m} \oplus \dots \oplus \mathfrak{m} \arrow[d, phantom, "\cap" rotate=90] \\
M \arrow[r, "\sim"'] & K \oplus \dots \oplus K
\end{tikzcd}$$

$$M/\mathfrak{m}M \simeq \underbrace{K/\mathfrak{m} \oplus \dots \oplus K/\mathfrak{m}}_{n}$$

$K/\mathfrak{m}$ – это поле

2-мерное векторное пр-во над полем $\Bbbk = K/\mathfrak{m}$

$M/\mathfrak{m}M$ — это тоже векторное пр-во над $K/\mathfrak{m}$ каноническим образом!

$[\lambda] \in \boxed{K/\mathfrak{m}}$ ← это поле корректно действует умножением на $M/\mathfrak{m}M$.

$[a] \in M/\mathfrak{m}M$

$[\lambda]\cdot[a] = [\lambda a]$ корректная операция

$\lambda' = \lambda + \mu, \ \mu \in \mathfrak{m}$

$a' = a + b, \ b \in \mathfrak{m}M \quad b = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n \quad x_i \in \mathfrak{m}, \ a_i \in M.$

$$\lambda' a' = \lambda a + \underbrace{\overset{\in \mathfrak{m}M}{\lambda b} + \overset{\in \mathfrak{m}}{\mu} a + \overset{\in \mathfrak{m}M}{\boxed{\mu b}}}$$

$\mathfrak{m}M$ — K-подмодуль в M

если M имеет базис над K из r векторов, то $r = \dim$ векторного пространства $\underbrace{M/\mathfrak{m}M}$ над полем $K/\mathfrak{m}$.

Теор. Если K — кольцо главных идеалов (например $\mathbb{Z}$ или $\Bbbk[x]$, где $\Bbbk$ — поле), и $M \simeq K^n$ — свободный модуль конечного ранга, то любой подмодуль $N < M$ тоже свободен и имеет $\operatorname{rk} N \leq \operatorname{rk} M$.

__Док-во__: Будем считать, что $M \cong K^n$

Рассмотрим $(x_1, \dots, x_n) \in N \subset K^n$

первые координаты x_1 всех векторов $a \in N$ образуют идеал в K.

$$\frac{\begin{array}{l}(x_1, \dots) \in N \\ + (y_1, \dots) \in N\end{array}}{(x_1+y_1, \dots) \in N} \qquad \frac{\begin{array}{c}(x_1, \dots) \in N \\ б \times \lambda\end{array}}{(\lambda x_1, \dots) \in N}$$

Пусть d — образующая идеала первых координат и $e_1 = (d, \dots) \in N$

$$v = (x_1, \dots, x_n) \in N \Rightarrow$$

$$v - \lambda e_1 = (0, y_2, \dots, y_n)$$

__Заключение__: $N = \boxed{K \cdot e_1 \oplus N'}$

N' — подмодуль в N, состоящий? из векторов с нулевой координатой

__Отступление__: $\forall$ подмодулей $N_1, N_2 \subset M$

можно рассмотреть сумму

$$N_1+N_2 := \{a_1+a_2 \mid a_1\in N_1,\ a_2\in N_2\}$$

Это тоже подмодуль. Сумма называется прямой и обозначается $N_1\oplus N_2$, если

$$a_1+a_2=b_1+b_2 \qquad \begin{matrix} a_1, b_1\in N_1 \\ a_2, b_2\in N_2 \end{matrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$a_1=b_1 \ \text{и}\ a_2=b_2$$

т.е. отображение $N_1\times N_2 \longrightarrow N_1+N_2$

$$(a_1,a_2)\longmapsto a_1+a_2$$

биекция. Критерий: сумма прямая $\Leftrightarrow$ $N_1\cap N_2=0$. Док-во: $\exists a\in N_1\cap N_2 \Rightarrow$

$$0=0+0=a+(-a)$$ – 2 разных представления

если $N_1\cap N_2=0$ и $a_1+a_2=b_1+b_2$

$$\Downarrow$$

$$N_1\cap N_2 \ni \boxed{\underset{\substack{\uparrow\\ N_1}}{a_1-b_1}=\underset{\substack{\uparrow\\ N_2}}{a_2-b_2}}$$

$$\Downarrow$$

$$a_1=b_1\ \&\ a_2=b_2$$

возвращаемся к док-ву теоремы:

$$N = Ke_1 \oplus N'$$

$$N = Ke_1 + N' \quad '' \{(0, * \dots *)\}$$

и сумма прямая! $e_1 = (d, * \dots *)$

$xe_1 = (xd, *, \dots *) = 0$

только при $x = 0$

процесс можно дальше продолжать

$$e_2 = (0, d_2, \dots)$$

где $d_2 =$ НОД всех вторых координат всех векторов из $N' = \{(0, * \dots\}$.

$$N = Ke_1 \oplus Ke_2 \oplus \dots \oplus Ke_n$$

$e_1, \dots, e_n$ – это базис.

В нашем курсе: рассматриваются только конечные линейные комбинации. Наборы векторов могут быть произвольной мощности.

Пример $1, x, x^2, \dots$ – базис пр-ва многочленов $\Bbbk[x]$, но не базис в $\Bbbk[[x]]$.

$\frac{1}{1-\alpha x}$, $\alpha \in \Bbbk$ линейно независимы