Лекция 5 ноября (первая половина)

Модули над коммутативными кольцами (обобщение векторных пр-в над полем)

Пусть K — это комм. кольцо.

Опр.: Абелева группа M называется модулем над K (K-модулем), если задана операция $K \times M \to M$ "умножение векторов из M на скаляры из K) со свойствами:

- $\forall x,y \in K \ \forall a \in M \quad x(ya)=(xy)a$
  (ассоциативность)
- $\forall x,y \in K \ \forall a \in M \quad (x+y)a = xa+ya$
  $\forall x \in K \ \forall a,b \in M \quad x(a+b)=xa+xb$
  (дистрибутивность)

если в кольце K есть единица, то K-модуль M называется *унитальным*, если $\forall a \in M$

$$1 \cdot a = a$$

Векторное пр-во над полем $\mathbb{K}$ = унитальный

$\mathbb{K}$-модуль

Из этих аксиом автоматически вытекает, что в унитальном модуле $\underbrace{(-1)}_{-1\in K}\cdot a = \underbrace{-a}_{\substack{\text{элемент}\\ \text{противоп. к } a\\ \text{в } M}}$

а в любом модуле $\overset{K}{\overset{\downarrow}{0}}\cdot a = 0 \quad \forall a\in M$

$x\cdot \underset{\underset{M}{\uparrow}}{0} = 0 \quad \forall x\in K$

Упражнение

Пример: $0\cdot a = (0+0)\cdot a = 0\cdot a + 0\cdot a$

$\downarrow -0\cdot a$

$0 = 0\cdot a$

Примеры, отличные от векторных пр-в:

Пример 1: K как модуль над собой. Идеал $I\lhd K$ это в точности подмодуль: абелева подгруппа и $K\cdot I\subset I$.

Пример 2: Любая абелева группа A является модулем над $\mathbb{Z}$: $n\cdot a = \underbrace{a+\dots+a}_{n} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

$(-n)\cdot a = \underbrace{-a-a-\dots-a}_{n}$

Напоминание терминологии: Векторы $w_1,\dots,w_m$ порождают M над K, если любой $a\in M$ представляется в виде

$a = x_1w_1+\dots+x_mw_m$

[множество порождающих может быть бесконечно!: Мы говорим, что мн-во $E \subset M$ порождает M, если $\forall a \in M$ $\exists m \in \mathbb{N}$ и $x_1, \dots, x_m \in K$ и $w_1, \dots w_m \in E$:

$$a = x_1 w_1 + \dots + x_m w_m \text{]}$$

Множество $E \subset M$ наз. линейно независимым, если из равенства $x_1 w_1 + \dots + x_m w_m = 0$, где $x_i \in K$, $w_i \in E$, $m \in \mathbb{N}$, следует, что все $x_i = 0$.

Базис в M — это порождающее линейно-независимое множество векторов.

Эквивалентно: $E \subset M$ это базис, если $\forall a \in M$ $\exists!$ представление $a = \sum_{i=1}^{n} x_i w_i$ с $x_i \in K$, $w_i \in E$, $n \in \mathbb{N}$.

В модуле может не быть базиса (!)

(как $\mathbb{Z}$-модуль)

пример: $\mathbb{Z}/(n)$ порождается одним элементом $[1]$: $[k] = k \cdot [1] = \underbrace{[1] + \dots + [1]}_{k}$

Элемент $[1]$ линейно зависим: $n \cdot [1] = \boxed{[0]}$

пример 2: $M = (x, y) < \mathbb{Q}[x,y]$, $K = \mathbb{Q}[x,y]$

M нельзя породить над $\mathbb{Q}[x,y]$ одним многочленом $(x, y \mid f(t))$

x и y линейно зависимы над $\mathbb{Q}[x,y]$:

$$\overset{\mathbb{Q}[x,y]}{\overset{\cup}{y}} \cdot \underset{\underset{M}{\cap}}{x} - \overset{\mathbb{Q}[x,y]}{\overset{\cup}{x}} \cdot \underset{\underset{M}{\cap}}{y} = 0$$

Причина: Над полем $\Bbbk$ векторы $w_1, \dots, w_m$ линейно зависимы $\Longleftrightarrow$ один из них выражается через остальные

$$x_1 w_1 + \dots + x_m w_m = 0 \quad \text{и } x_1 \neq 0$$

$$w_1 = -\frac{x_2}{x_1} w_2 - \dots - \frac{x_m}{x_1} w_m$$

Над кольцом это не так!

Модуль M называется свободным, если в нём есть базис.

Теор.: В любом векторном пр-ве есть базис и все базисы равномощны. Любой линейно-независимый набор можно дополнить до базиса, а в любом порождающем наборе содержится базис.

Пусть V – векторное пр-во, и
$N \subset P \subset V$ – два подмножества:
N – линейно независимо, а
P – порождает V.
(годятся $N = \emptyset$, $P = V$)

Тогда линейно независимые подмножества $L \subset V$: $N \subset L \subset P$ образуют ЧУМ по включению и для него выполнена лемма Цорна: каждое линейно упорядоченное семейство $\{L_\nu\}_{\nu \in W}$ допускает верхнюю грань – а именно: $\bigcup_\nu L_\nu \supset L_\mu \ \forall \mu$

если $x_1 a_1 + \dots + x_m a_m = 0$
все $a_i \in L_\nu$ для какого-то ν $\Rightarrow$
все $x_i = 0$ т.к. L_ν линейно независим.

По лемме Цорна $\exists$ макс. элемент $L \supset N$: любое множество L': $L \subsetneq L'$ и $N \subset L' \subset P$ линейно зависимо. В частности,

$\forall a \in P$ $\quad L \cup a$ линейно зависимо $\Rightarrow$
a линейно выражается через $L \Rightarrow$

$\Rightarrow L$ порождает V

Это доказывает существование и последние 2 утверждения

Равномощность всех базисов:

В конечномерном случае (сравнение 2х конечных базисов) это следует у леммы о замене: если $\underline{u_1 \dots u_n}$ линейно независимы, а $w_1, \dots, w_m$ порождают V, то $m \geq n$ и w_i можно так перенумеровать, что $\underline{u_1, \dots, u_n, w_{n+1}, \dots, w_m}$ тоже порождают V.

Док-во: $u_1 \neq 0$ т.к. u_i линейно независимы

$u_1 = x_1 w_1 + \dots + x_m w_m$ и $\exists x_i \neq 0$. Тогда можно считать, что это x_1. Тогда

$$w_1 = \frac{1}{x_1} u_1 - \frac{x_2}{x_1} w_2 - \dots - \frac{x_m}{x_1} w_m$$

$\Downarrow$

Набор $u_1, w_2, \dots, w_m$ порождает V.

по индукции: Пусть $u_1 \dots u_k w_{k+1} \dots w_m$ порождают V и $k<n$. Тогда

$$u_{k+1} = y_1 u_1 + \dots + y_k u_k + x_{k+1} w_{k+1} + \dots + x_m w_m$$

$\exists x_i \neq 0$, т.к. u_i — линейно независимы

$\Downarrow$

$m \geq k+1$ и можно считать, что $x_{k+1} \neq 0$

$$w_{k+1} = \frac{1}{x_{k+1}} u_{k+1} - \dots$$

выражается через $u_1, \dots, u_{k+1}, w_{k+2}, \dots, w_n$

это воспроизводит индуктивное предположение

Пусть E и H два базиса и H мощнее, чем E. $\boxed{[E \text{ и } H \text{ бесконечны}]}$

Каждый вектор $e \in E$ — это линейная комбинация конечного множества $\underset{\uparrow \, \text{конечное}}{H_e} \subset H$ векторов из H.

$$H' = \bigsqcup_{e \in E} H_e \text{ равномощно } E$$

$\|$ E штук конечных множеств H_e.

$H \setminus H'$ непусто, т.е. $\exists v \in H$, не участвующий в разложении векторов $e \in E$.

E - базис $\Rightarrow v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $e_i \in E$

каждый e_i — линейная комбинация векторов из H'

$$v = \sum_{w \in H'} w \leftarrow \text{конечная сумм.}$$

$\mathbb{k}[[x]]$ как векторное пр-во над $\mathbb{k}$.

как предъявить базис? непонятно!

$\mathbb{R}[[t]]$ $\quad \dfrac{1}{1-\alpha t} = \sum \alpha^k t^k$, $\alpha \in \mathbb{R}$

они линейно независимы над $\mathbb{R}$.

$$\frac{x_1}{1-\alpha_1 t} + \frac{x_2}{1-\alpha_2 t} + \ldots + \frac{x_m}{1-\alpha_m t} = 0$$

$$x_1 \prod_{j \neq 1} (1-\alpha_j t) + x_2 \underbrace{\prod_{j \neq 2} (1-\alpha_j t)}_{} + \ldots = 0$$

$t = \dfrac{1}{\alpha_1} \Rightarrow x_1 = 0$

$t = \dfrac{1}{\alpha_2} \Rightarrow x_2 = 0$
