Лекция 22 октября (вторая половина)

Делимость и идеалы

Имеем дело (по умолчанию) с целостными коммутативными кольцами K

с единицей и без делителей нуля

Подкольцо $I \subset K$ называется **идеалом**, если $a \in I \Rightarrow ka \in I \;\forall k \in K$

Главный пример: $\forall$ гомоморфизма колец

$$\varphi: A \longrightarrow B$$

$$\ker\varphi = \{a \in A \mid \varphi(a) = 0\} = \varphi^{-1}(0)$$

Это идеал в A

$$\varphi(a) = 0 \Rightarrow \varphi(ka) = \varphi(k)\varphi(a) = 0$$

Пусть дано кольцо A, разбитое на классы эквивалентности $[a] \subset A$

Когда правила: $\left.\begin{aligned} [a_1] + [a_2] &= [a_1 + a_2] \\ [a_1] \cdot [a_2] &= [a_1 a_2] \end{aligned}\right\} *$

корректны и задают на множестве классов $A/\sim$ структуру кольца?

(*) ⟸ отображение факторизации:

$$\begin{tikzcd} \pi : A \arrow[r] & A/\sim \\ a \arrow[r, mapsto] & {[a]} \end{tikzcd}$$

является гомоморфизмом колец

Тогда ядро $\ker\pi = [0]$ — это идеал.

$\pi^{-1}[b] = [b] \subset A$ — это сдвиг класса $[0]$ (ядра π) на b

$\forall b \in A : [b] = b + [0]$

$\forall$ идеала $I < A$ отношение $[a_1] = [a_2]$

$$\Updownarrow$$

$$a_1 - a_2 \in I$$

это эквивалентность, и на факторе A/I правила (*) корректны, а значит, снабжают A/I структурой? коммутативного кольца.

$$[a_1] = [a_1'] \qquad a_1' = a_1 + i_1$$

$$[a_2] = [a_2'] \qquad a_2' = a_2 + i_2$$

$$[a_1 + a_2] = [a_1' + a_2']$$

$$\shortparallel$$

$$a_1 + i_1 + a_2 + i_2 = a_1 + a_2 + \underbrace{(i_1 + i_2)}_{I}$$

$$[a_1 a_2] = [a_1' a_2']$$

$$\parallel$$

$$a_1 a_2 + \underbrace{a_1 i_2 - a_2 i_1 + i_1 i_2}_{I}$$

Вывод: Идеалы — это ядра гомоморфизмов и только они ($\forall$ идеала $I \subset A$ есть гомоморфизм факторизации $A \twoheadrightarrow A/I$).

Замечания об устройстве идеалов:

- имеется тривиальный идеал $(0) = \{0\}$
- имеется несобственный идеал $(1) = K$
- если в идеале I есть обратимый элемент, то $I = (1) = K$
- кольцо K — поле $\Leftrightarrow$ в K нет нетривиальных собственных идеалов, т.е. идеалов кроме (0) и (1).
- с любым подмножеством $M \subset K$ можно связать идеал (M) = наименьший идеал, содержащий M = $\bigcap$ всех идеалов, содержащих M [пересечение идеалов - идеал] $= \{ a_1 m_1 + a_2 m_2 + \ldots + a_k m_k \mid \underline{k \in \mathbb{N}}, m_i \in M, a_i \in K \}$

- главные идеалы $(a)=\{ka \mid k\in K\}$

$a\in K$ – фиксир. элемент.

если все идеалы в K главные, K наз. кольцом главных идеалов

Опр: Кольцо K наз. нётеровым, если выполняются следующие эквивалентные свойства:

(1) В любом множестве $M\subset K$ есть конечное подмножество $M_{fin}\subset M$: $(M_{fin})=(M)$

(2) Любой идеал $I\subset K$ имеет вид $I=(a_1,\dots,a_m)$, т.е. порождается конечным множеством элементов

(3) Любая бесконечная цепочка возрастающих идеалов $I_1\subseteq I_2\subseteq I_3\subseteq\dots$ стабилизируется, т.е. $\exists n: I_k=I_n\ \forall k\geq n$.

Проверка равносильности (1)–(3):

(1)$\Rightarrow$(2) очевидно $I=(I)$ и выбрать конечное подмн.-во $I_{fin}\subset I$: $(I)=(I_{fin})$

(2) ⇒ (3) $\bigcup I_\nu = I$ – это тоже идеал ⇒
$I = (a_1, \dots, a_m)$ в силу (2)
все $a_i \in I_n$ ⇒ $I_k = I_n$ при $k \geq n$

(3) ⇒ (1) $M < K$ как построить M_{fin}?
берём любой $a_1 \in M$, если
$(a_1) \neq (M)$ берём $a_2 \in M \setminus (a_1)$, если
$(a_1, a_2) \neq (M)$ берём $a_3 \in M \setminus (a_1, a_2)$
и т.д. $(a_1) \subsetneq (a_1, a_2) \subsetneq (a_1, a_2, a_3) \dots$
в силу (2) должно закончиться
через конечное число шагов.

Бывают не нётеровы кольца, например
$\mathbb{K}[x_1, x_2, x_3, \dots] = \{$ конечные
линейные комбинации мономов вида
$x_{k_1}^{m_1} \dots x_{k_s}^{m_s}$, $s \in \mathbb{N}$
$m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$I = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ = многочлены без
свободного члена.

Более важный пример: Кольцо голоморфных функций = формальные ряды из $\mathbb{C}[[z]]$, которые сходятся всюду в $\mathbb{C}$ тоже не нётерово

"Теорема Гильберта о базисе идеала"

Если кольцо K нётерово, то кольцо многочленов $K[x]$ тоже нётерово.

Док-во: Пусть $I \subset K[x]$ - любой идеал.

положим $I_m \subset K = \{$мн-во старших коэффициентов многочленов степени $\leq m\}$ из $I\}$

$\|$

это идеал в K $\forall m$, включая

$\boxed{m=\infty}$

$$\left(\begin{array}{l} f = a_{k_1} x^{k_1} + \dots \\ g = a_{k_2} x^{k_2} + \dots \\ \qquad k_1 \geq k_2 \\ f + x^{k_1-k_2} g \text{ имеет с.к } a_{k_1} + a_{k_2} \end{array} \right)$$

$I_\infty \subset K$ = мн-во всех старших коэфф-тов, многочленов из I.

Т.к. K – нётерово, каждый

$I_m = (a_1^{(m)}, \dots, a_{k_m}^{(m)})$

пусть $f_1^{(m)}, \dots, f_{k_m}^{(m)} \in I$ – многочлены со ст.к-тами $a_1^{(m)} \dots a_{k_m}^{(m)}$. (где $m=\infty$ тоже участвует).

Пусть $D = \max(\deg f_i^{(\infty)})$

Замечание 1 по модулю идеала $(f_1^{(\infty)}, \dots, f_{k_\infty}^{(\infty)})$ любой многочлен $g \in I$ сравним с многочленом степени меньше, чем D.

$$g = a_m x^m + \dots \in I$$

$$a_m = b_1 a_1^{(\infty)} + b_2 a_2^{(\infty)} + \dots + b_{k_\infty} a_{k_\infty}^{(\infty)}$$

если $m \geq D$

$$g - b_1 f_1^{(\infty)} \cdot x^{m-\deg f_1^{\infty}} - b_2 f_2^{(\infty)} x^{m-\deg f_2^{\infty}} - \dots$$

имеет степень строго меньше, чем m.

Вывод: многочлены $f_i^{(\infty)}$ и $f_j^{(k)}$ с $k = 0, 1, 2, \dots, D-1$ порождают I

Следствие 1: $K[x_1, \dots, x_n]$ нётерово, если K - нётерово.

Следствие 2: если K - нётерово, то любая (бесконечная) система полиномиальных уравнений $\{f_\nu(x_1, \dots, x_n) = 0\}$

где $\nu \in M$, $f_\nu \in K[x_1, \dots, x_n]$,

равносильна некоторой своей *конечной* подсистеме.

Док-во $I = (f_\nu)_{\nu \in M}$ имеет конечное число образующих $f_1, \dots, f_m$

и тогда $\forall g \in I$ $g = \sum_{i=1}^{m} h_i f_i$, $h_i \in K[x_1 \dots x_n]$

$$g(x) = 0 \Leftarrow f_1(x) = 0,\ f_2(x) = 0,\ \dots\ f_m(x) = 0$$

Зам.: Фактор нётерова кольца тоже нётеров

$$A \xrightarrow{\varphi} A/I.$$

$\varphi^{-1}(J)$ $\qquad \overset{\cup}{J}$ $\qquad a : \varphi(a) \in J$

$\forall b \;\; \varphi(ba) = \varphi(b)\underline{\underline{\varphi(a)}} \in J$

$\uparrow$

идеал в A

$\varphi^{-1}(J) = (a_1, \dots, a_m) \Rightarrow J = \varphi((a_1, \dots, a_m))$

$\varphi(a_1) \dots \varphi(a_m)$ порождают J.

Следствие: Все ~~конечно-порождённые коммут.~~ K-алгебры над нётеровым кольцом K нётеровы

K ⓚ

$$\parallel \quad \frac{K[x_1, \dots, x_n]}{\boxed{I}} \quad =$$

ур. $f(a_1, \dots, a_n) = 0$

Это всё, что можно получить из элементов $1, a_1 = [x_1], a_2 = [x_2], \dots, a_n = [x_n]$ при помощи арифм. операций сложения, умножения и эти эл-ты удовл. алгебраическим соотношениям $f(a_1, \dots, a_n) = 0$

$\forall f \in I$