Лекция 8 октября (вторая половина)

Поле рациональных функций: $\Bbbk(x) = \left\{ \frac{p(x)}{q(x)} \;\middle|\; p(x), q(x) - \text{многочлены} \right\}$

Что такое дробь $\frac{p}{q}$?

Пусть K – кольцо с единицей? (например $\mathbb{Z}$ или $\Bbbk[x]$).

$\frac{a}{b} = \frac{as}{bs}$ $\forall s$ разрешённого в качестве знаменателя

↑

не эквивалентность.

на множестве пар (a,b) отношение $(a,b) \sim (as,bs)$. не транзитивно.

$\frac{a}{b}$ – это класс эквивалентности по модулю наименьшей эквивалентности, содержащей отождествления $(a,b) \sim (as,bs)$.

неявно заданные эквивалентности

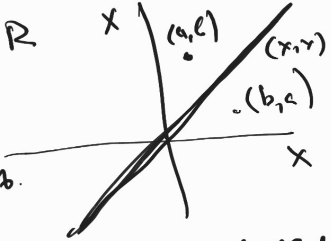
$R \subset X \times X$

$x \sim x$ (рефл.)

$x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$ (симм.)

$x \sim y \quad y \sim z \Rightarrow x \sim z$ (транзит.)

$R \circ R \subset R$



пересечение эквивалентностей — это эквивалентность.

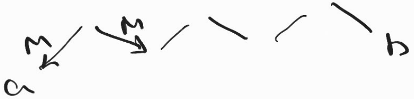
$\forall$ множества $M \subset X \times X$ есть наименьшая эквивалентность, которая M содержит — пересечение всех эквивалентностей, содержащих M. — оно называется эквивалентностью, порождённой M: $\tilde{M}$

$a \underset{M}{\sim} b$ если $\exists$ конечная цепочка

$a = a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m, a_{m+1} = b$

в которой $(a_i, a_{i+1}) \in M$ или $(a_{i+1}, a_i) \in M$

$\forall i$



Какая наименьшая эквивалентность на множестве пар (a,b), содержащая все отождествления $(as, bs) = (a,b)$?

K - коммутативное кольцо с 1

$S \subset K$ - множество знаменателей $\qquad (a,b) \sim \frac{a}{b}$

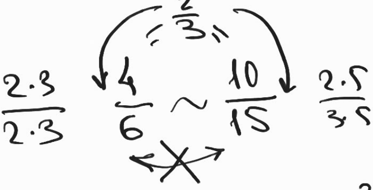
такое, что $1 \in S$ $\qquad \frac{a}{1}$

$s_1, s_2 \in S \Rightarrow s_1 \cdot s_2 \in S$

мультипликативное множество

Рассматриваем пары (a,s): $a \in K$, $s \in S$

и наименьшую эквивалентность, в которой $(a_1,s_1) \sim (a_1 t, s_1 t)$ $\forall t \in S$.



В наименьшей эквивалентности $\approx$, которая содержит $\sim$

пары (a_1, s_1) $\left[= \frac{a_1}{s_1} \right]$

(a_2, s_2) $\left[= \frac{a_2}{s_2}\right]$

эквивалентны $\Longleftrightarrow$ $\boxed{\exists t \in S: \ t a_1 s_2 = t a_2 s_1}$

$\uparrow$ это условие содержится в $\approx$

если оно выполнено, то

$$(a_1,s_1) \underset{\xrightarrow{ts_2}}{\sim} (a_1 t s_2,\ s_1 t s_2) = (t a_2 s_1,\ s_1 t s_2)$$

$$\wr \quad \uparrow ts_1$$

$$(a_2, s_2)$$

$\approx$ — это эквивалентность.

рефлексивность и симметричность очевидны

Транзитивность — проверяется

$$a_2 s_3 u = a_3 s_2 u$$

$$(a_1,s_1) \underset{\uparrow}{\approx} (a_2,s_2) \overset{\downarrow}{\approx} (a_3,s_3)$$

$$a_1 s_2 t = a_2 s_1 t$$

что такое?

$$a_1 s_3 \cdot \underset{tu}{?} = a_3 s_1 \cdot \underset{tu}{?}$$

$$\underset{\bullet}{a_1}\underset{\bullet}{s_3}\underset{\bullet}{s_2} t u = \underset{\bullet}{a_2} s_1 t \underset{\bullet}{s_3} \underset{\bullet}{u} =$$

$$= a_3 s_2 u t s_1$$

$$\boxed{a_1 s_3 \; s_2 t u = a_3 s_1 \; s_2 t u}$$ транзитивно!

≈ - эквив.

Если K - коммутативное кольцо с единицей?, S - мультипликативное подмножество

Определено кольцо дробей $S^{-1}K$ со знаменателями из S.

Его элементы - дроби $\frac{a}{s}$ - это классы пар (a,s) по модулю эквивалентности ≈

$$\frac{a_1}{b_1}\cdot\frac{a_2}{b_2} = \boxed{\frac{a_1 a_2}{b_1 b_2}}$$

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{b_1 b_2}$$

Эти правила корректны — результат не меняется при замене $\frac{a}{b}$ на $\frac{as}{bs}$ с $s \in S$.

$$\frac{a_1}{b_1} \quad \frac{a_1 s}{b_1 s} \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 a_2 s}{b_1 b_2 s}$$

Имеется отображение
$$\begin{aligned} K &\longrightarrow S^{-1}K \\ x &\longmapsto \frac{x}{1} \end{aligned}$$

Замечание: иногда в определении мультипл. системы требуется чтобы $0 \notin S$.

Если $0 \in S$, то $S^{-1}K = 0$

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot 0}{b \cdot 0} = \frac{0 \cdot 0}{1 \cdot 0} = 0.$$

$$K \xrightarrow{i} S^{-1}K$$

Замечание

имеет в качестве ядра делители нуля относительно S, т.е.

$$\ker i = \{ x \in K \mid \exists s \in S : xs = 0 \}$$

$\exists s:$

$\frac{x}{1} = \frac{0}{1} \Leftrightarrow x \cdot 1 \cdot s = 0 \cdot s$

Замечание 3 отображение

$$K \xrightarrow{i} S^{-1}K$$

переводит все элементы из S в обратимые: $\frac{s}{1} \cdot \frac{1}{s} = 1$ и универсально среди отображений с таким свойством, в том смысле, что

∀ гомоморфизма
$\varphi : K \to L$:
$\varphi(x)$ обратим в L
$\forall x \in S$ $\exists!\ \tilde{\varphi} : S^{-1}K \to L$:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & S^{-1}K \arrow[dl, "\tilde{\varphi}\ \exists!"] \\ & L & \end{tikzcd}$$

$\varphi = \tilde{\varphi} \circ i$

Более того, это универсальное свойство определяет кольцо $S^{-1}K$ однозначно с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного с i

---

Почему φ пропускается через i?

$$\begin{tikzcd}
s \arrow[ddr] & K \arrow[r] \arrow[dr, "\varphi"] & \boxed{S^{-1}K} \arrow[d, "\tilde{\varphi}"] \\
& & L \\
& \text{обратимый элемент} &
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{\begin{gathered} \tilde{\varphi}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\tilde{\varphi}(a)}{\tilde{\varphi}(b)} \\ \tilde{\varphi}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{\varphi(s)} \end{gathered}}$$

$\varphi(s) \cdot \frac{1}{\varphi(s)} = 1$

$\to$ обратим и $\varphi(s)$ в L

$\tilde{\varphi}$ однозначно задаётся

Эти правила корректно задают гомоморфизм $S^{-1}K \to L$

$$\begin{tikzcd}
S^{-1}K \arrow[rr, "\tilde{i}' \circ \tilde{i} = Id"] & & S^{-1}K \\
& K \arrow[ul, "i"] \arrow[ur, "i"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
K \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "i'"'] & S^{-1}K \arrow[d, shift right, "\tilde{i}'"'] \\
& {[S^{-1}K]'} \arrow[u, shift right, "\tilde{i}"']
\end{tikzcd}$$

Id делает диаграмму коммутативной и $\tilde{i}' \circ \tilde{i}$ тоже делает

$\Downarrow$

$\tilde{i}' \circ \tilde{i} = Id$ в силу единственности гомоморфизма, пропускающего i через i

По той же причине $\tilde{i} \circ \tilde{i}' = Id$

$$\begin{tikzcd}
{[S^{-1}K]'} \arrow[rr, "\tilde{i} \circ \tilde{i}'"] & & {[S^{-1}K]'} \\
& K \arrow[ul, "i"] \arrow[ur, "i'"'] &
\end{tikzcd}$$
