## Кватернионы

**A18◇1.** Укажите в $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ какой-нибудь базис, в котором форма det имеет диагональную матрицу Грама с диагональными элементами $(+1, -1, -1, -1)$.

**A18◇2.** Покажите, что центр тела кватернионов совпадает с пространством чисто вещественных кватернионов[1]: $Z(\mathbb{H}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\zeta \in \mathbb{H} \mid q\zeta = \zeta q \ \ \forall q \in \mathbb{H}\} = \mathbb{R} \cdot \boldsymbol{e}$.

**A18◇3.** Покажите, что для любого $q \in \mathbb{H}$ с $q^2 = -1$ множество кватернионов вида $\alpha + q\beta$ с $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ образуют в $\mathbb{H}$ подполе, изоморфное $\mathbb{C}$.

**A18◇4.** Покажите, что любой невещественный кватернион является корнем квадратного уравнения с вещественными коэффициентами и отрицательным дискриминантом.

**A18◇5 (чисто мнимые кватернионы).** Покажите, что **а)** $I = \{q \in \mathbb{H} \mid q^* = -q\} = \{q \in \mathbb{H} \mid q^2 \in \mathbb{R}_{\leqslant 0}\}$ **б)** билинейная форма $(p, q) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (pq^* + qp^*)/2$ является евклидовым скалярным произведением на $I$ **в)** множество решений уравнения $q^2 = -1$ в теле $\mathbb{H}$ это единичная сфера в $I$ **г)** все ортонормальные базисы в $I$, ориентированные так же, как $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$, имеют одинаковые таблицы умножения **д)** $I$ замкнуто относительно коммутаторной скобки $[x, y] \stackrel{\mathrm{def}}{=} xy - yx$ **е)** $[x, y]$ ортогонален к $x$ и $y$, а длина $[x, y]$ равна абсолютной величине площади параллелограмма, натянутого на $x$ и $y$

**A18◇6.** Покажите, что отображение $\varphi_a : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ сопряжения кватенионом $a : q \mapsto aqa^{-1}$ **а)** является $\mathbb{R}$-линейным автоморфизмом тела $\mathbb{H}$ и собственной евклидовой изометрией пространства $I$ **б)** оставляет на месте плоскость $\Pi_a = \mathbb{R} \cdot 1 + \mathbb{R} \cdot a$ **в)** $\Pi_a \cap I = \mathbb{R} \cdot \boldsymbol{m}$, где $\boldsymbol{m}^2 = -1$ **г)** представляет собой поворот вокруг оси $\mathbb{R} \cdot \boldsymbol{m}$ на угол $2\alpha$, если смотреть вдоль $\boldsymbol{m}$, где $\alpha = \operatorname{Arg} a$ определяется разложением $a = |a| \cdot (cos\alpha + \boldsymbol{m} \sin\alpha)$.

**A18◇7.** Явно вычислите вещественную $3 \times 3$ матрицу $\varphi_\alpha \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, которой записывается в базисе $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ образ $\varphi_\alpha$ данной комплексной $2 \times 2$ матрицы $\alpha \in \mathrm{SU}_2$ при гомоморфизме $\mathrm{SU}_2 \twoheadrightarrow \mathrm{SO}_{\det}(I) \simeq \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, $\alpha \mapsto \varphi_\alpha|_I$.

**A18◇8.** Проверьте, что отображение $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{SO}_{\det}(\mathbb{C})$, переводящее пару матриц $g_1, g_2 \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ в линейное преобразование $A \mapsto g_1 A g_2^{-1}$, является гомоморфизмом групп, найдите его ядро и образ и явно вычислите комплексную ортогональную 4×4-матрицу, которую будет иметь оператор, отвечающий произвольно заданной паре матриц $g_1, g_2 \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, в базисе, который Вы построили в зад. A18◇1.

**A18◇9.** Покажите, что комплексные структуры на $\mathbb{H}$, продолжающие кватернионную норму до эрмитовой структуры, исчерпываются операторами левого и правого умножения на чисто мнимые кватернионы нормы 1, причём все эти комплексные структуры различны.

**A18◇10.** Покажите, что следующие наборы кватернионов являются мультипликативными подгруппами в $\mathbb{H}$ **а)** 8 кватернионов $\pm\boldsymbol{e}$, $\pm\boldsymbol{i}$, $\pm\boldsymbol{j}$, $\pm\boldsymbol{k}$ **б)** 16 кватернионов $(\pm\boldsymbol{e} \pm \boldsymbol{i} \pm \boldsymbol{j} \pm \boldsymbol{k})/2$ **в)** 24 кватерниона, получающиеся из $(\pm\boldsymbol{e} \pm \boldsymbol{i})/\sqrt{2}$ перестановками букв $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ **г)** 24 кватерниона, получающиеся объединением кватернионов из пп. (а) и (б) **д)** 120 кватернионов, получающихся добавлением к кватернионам из п. (г) ещё 96 кватернионов, которые можно изготовить всевозможными чётными перестановками букв $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ из кватернионов $(\pm\boldsymbol{e} \pm \alpha\boldsymbol{i} \pm \alpha^{-1}\boldsymbol{j})/2$, где $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$. **е)** Докажите, то группа из п. (д) изоморфна $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_5)$ и гомоморфно накрывает группу икосаэдра $A_5$ (поэтому её называют *бинарной группой икосаэдра.*

**A18◇11.** Можно ли расположить в $\mathbb{H}$ октаплекс[2] так, чтобы его вершины составили мультипликативную подгруппу в $\mathbb{H}$?

---

[1] в матричной интерпретации — вещественных скалярных матриц

[2] см. задачу A15◇10

Персональный табель ________________________________________.
(напишите свои фамилию, имя и отчество)

Листок №18 (15 мая 2015)

| № | дата сдачи | имя и фамилия принявшего | подпись принявшего |
|---|---|---|---|
| 1 | | | |
| 2 | | | |
| 3 | | | |
| 4 | | | |
| 5а | | | |
| б | | | |
| в | | | |
| г | | | |
| д | | | |
| е | | | |
| 6а | | | |
| б | | | |
| в | | | |
| г | | | |
| 7 | | | |
| 8 | | | |
| 9 | | | |
| 10а | | | |
| б | | | |
| в | | | |
| г | | | |
| д | | | |
| е | | | |
| 11 | | | |