Квадратичные формы

А16◇1. Существует ли на $\mathbb{R}^7$ квадратичная форма с главными угловыми минорами
- **а)** $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 > 0$, $\Delta_4 < 0$, $\Delta_5 = 0$, $\Delta_6 < 0$, $\Delta_7 > 0$
- **б)** $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 > 0$, $\Delta_4 < 0$, $\Delta_5 = 0$, $\Delta_6 > 0$, $\Delta_7 > 0$
- **в)** $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 > 0$, $\Delta_4 < 0$, $\Delta_5 = 0$, $\Delta_6 < 0$, $\Delta_7 < 0$?

Если да, то какая у неё может быть сигнатура?

А16◇2. Для $X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ пусть $\det(tE - X) = t^n + \sigma_1(X)t^{n-1} + \sigma_2(X)t^{n-2} + \cdots$. Покажите, что $\sigma_2(X)$ является квадратичной формой на пространстве $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ и вычислите её ранг и сигнатуру. Если общий случай вызывает затруднения, решите задачу для $n = 2, 3, 4$.

А16◇3. Найдите сигнатуру квадратичной формы $\mathrm{tr}\left(A^2\right)$ на пространстве $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$. Если общий случай вызывает затруднения, решите задачу для $n = 2, 3, 4$.

А16◇4. Убедитесь, что функция $A \mapsto \det A$ является квадратичной формой на пространстве $\mathrm{Mat}_2(\Bbbk)$, явно опишите её поляризацию в виде $\widetilde{\det}(A, B) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(A \cdot B^?)$ (т. е. поймите, что есть $B^?$) и найдите её сигнатуру над $\Bbbk = \mathbb{R}$. Гиперболична ли она над $\Bbbk = \mathbb{F}_p$?

А16◇5. Рассмотрим кольцо $K = \mathbb{F}_3[x]/(x^3 - x + 1)$ как трёхмерное векторное пространство над полем $\mathbb{F}_3$ с симметричной билинейной формой $\mathrm{tr}(ab)$ (след умножения на $ab : K \to K$, $x \mapsto ab\,x$). Напишите её матрицу Грама в базисе $1, [x], [x^2]$, и выясните, есть ли K гиперболическая плоскость.

А16◇6. Обозначим через W пространство однородных грассмановых многочленов степени 2 от четырёх переменных $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ и зададим на W билинейную форму $p : W \times W \to \Bbbk$ правилом

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = p(\omega_1, \omega_2) \cdot \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_3 \wedge \xi_4 .$$

Напишите матрицу Грама формы p в базисе $\xi_{ij} = \xi_i \wedge \xi_j$ $(1 \leqslant i < j \leqslant 4)$ и убедитесь, что эта форма симметрична и невырождена. Какова её сигнатура над полем $\Bbbk = \mathbb{R}$?

А16◇7. Покажите, что гиперболичность пространства W с невырожденной квадратичной формой равносильна каждому из условий: **а)** $\dim W = 2k$ и в W есть k-мерное изотропное подпространство **б)** $W = U_1 \oplus U_2$, где U_1 и U_2 изотропны.

А16◇8. Покажите, что что пересечение неособой вещественной проективной квадрики Q сигнатуры (p, m) с касательной плоскостью T_xQ является линейным соединением точки x с неособой квадрикой сигнатуры $(p-1, m-1)$ в дополнительном к x подпространстве в T_xQ.

А16◇9. Какими могут быть ранг и сигнатура гиперплоского сечения неособой вещественной проективной квадрики Q сигнатуры (p, m)? Верно ли, что это сечение особо тогда и только тогда, когда гиперплоскость касается квадрики?

А16◇10. Перечислите все анизотропные формы над полем $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$.

А16◇11. Пусть $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$ и $\eta \in \mathbb{F}_p$ — какой-либо фиксированный не квадрат. Докажите, что над полем $\mathbb{F}_p$ всякая квадратичная форма
- **а)** от 2 переменных принимает все значения из $\mathbb{F}_p$, если она невырождена
- **б)** от $\geqslant 3$ переменных обладает ненулевым изотропным вектором
- **в)** приводится к виду $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{m-1}^2 + \varepsilon \cdot x_m^2$, где ε равен либо 1, либо η.

А16◇12* **(кольцо Витта)**. Назовём пространства со скалярными произведениями W*-эквивалентными*, если одно из них является прямой ортогональной суммой другого с каким-нибудь гиперболическим пространством. Покажите, что классы W-эквивалентных пространств над данным полем $\Bbbk$ образуют коммутативное кольцо $W(\Bbbk)$ с единицей относительно операций прямой ортогональной суммы (сложение) и тензорного произведения[1] (умножение).

А16◇13*. Вычислите **а)** $W(\mathbb{C})$ **б)** $W(\mathbb{R})$ **в)** $W(\mathbb{F}_p)$.

---

[1] тензорное произведение $U \otimes W$ пространств U и W с базисами $a_1, a_2, \dots, a_n$ и $b_1, b_2, \dots, b_m$ имеет размерность nm, базис $a_i \otimes b_j$ и линейно порождается векторами $u \otimes w \overset{\text{def}}{=} \sum x_i y_j \cdot a_i \otimes b_j$, где $u = \sum x_i a_i \in U$, $w = \sum y_j b_j \in W$; скалярное произведение на $U \otimes W$ определяется правилом $(u_1 \otimes w_1, u_2 \otimes w_2)_{U\otimes W} \overset{\text{def}}{=} (u_1, u_2)_U \cdot (w_1, w_2)_W$

Персональный табель ______________________________. Листок № 16 (9 апреля 2015)
(напишите свои фамилию, имя и отчество)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1а			
б			
в			
2			
3			
4			
5			
6			
7а			
б			
8			
9			
10			
11а			
б			
в			
12			
13а			
б			
в			