Ликбез по евклидовой геометрии

А15◇1. Сколько имеется k-мерных **а)** аффинных подпространств в $\mathbb{A}^n(\mathbb{F}_q)$ **б)** проективных подпространств в $\mathbb{P}_n(\mathbb{F}_q)$, где $\mathbb{F}_q$ — поле из q элементов.

А15◇2. Пусть точки $p_0, p_1, \dots, p_k \in \mathbb{R}^n$ не лежат в $(k-1)$-мерной аффинной плоскости. Найдите ГМТ равноудаленных от всех p_i и покажите, что через любые $n+1$ не лежащих в одной гиперплоскости точек в $\mathbb{R}^n$ проходит единственная $(n-1)$-мерная сфера.

А15◇3. Какое максимальное число векторов можно выпустить из начала координат евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ так, чтобы все углы между ними были тупыми?

А15◇4 (куб). Сколько у стандартного n-мерного куба $I^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x_i| \leqslant 1\}$ **а)** k-мерных граней[1] **б)** внутренних[2] диагоналей **в)** внутренних диагоналей, перпендикулярных заданной **г)** осей[3] симметрии **д)** гиперплоскостей симметрии?

А15◇5. Найдите в I^n **а)** длину диагонали и ее предел при $n \to \infty$ **б)** отношения, в которых делят внутреннюю диагональ ортогональные проекции на неё всех вершин куба **в)** углы между внутренней диагональю и рёбрами куба, и их пределы при $n \to \infty$ **г)** углы между внутренней диагональю и k-мерными гранями[4].

А15◇6. Опишите и нарисуйте семейство 3-мерных многогранников, получающихся в сечении I^4 семейством гиперплоскостей $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = c$, где $-4 \leqslant c \leqslant 4$.

А15◇7 (симплекс). В стандартном n-мерным симплексе[5] $\Delta^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_\nu \geqslant 0, \sum x_\nu = 1\}$ найдите: **а)** количество k-мерных граней **б)** радиус вписанного шара и его предел при $n \to \infty$ **в)** радиус описанного шара и его предел при $n \to \infty$ **г)** длину высоты и её предел при $n \to \infty$ **д)** угол между ребром и не содержащей его гипергранью **е)** кратчайшее расстояние между противолежащими m и $(n-m-1)$-мерными гранями **ж)** количество гиперплоскостей симметрии и углы между ними **з)** количество осей симметрии и углы между ними

А15◇8. В правильном четырёхмерном симплексе $ABCDE$ обозначим через X середину отрезка, соединяющего центры граней ABC и CDE. Проходящая через точку X прямая YZ пересекает прямую AE в точке Y, а плоскость BCD — в точке Z. Найдите $\overrightarrow{XY} : \overrightarrow{YZ}$.

А15◇9 (кокуб). Выпуклая оболочка концов стандартных базисных векторов и противоположных к ним векторов в $\mathbb{R}^n$ называется стандартным *кокубом*[6] C^n. Задайте C^n явной системой линейных неравенств и найдите **а)** количество k-мерных граней **б)** радиус вписанного шара и его предел при $n \to \infty$ **в)** угол между внутренней диагональю и примыкающей к ней k-мерной гранью и его предел при $n \to \infty$

А15◇10 (октаплекс). Выпуклая оболочка вершин куба I^4 и гомотетичного выпуклой оболочке центров его граней кокуба, вписанного в тот же шар, что I^4, называется *октаплексом* O^4. Выясните: **а)** правильный ли это многогранник[7] **б)** как выглядят 3-мерные гиперграни и каковы их 3-мерные объёмы **в)** как выглядят 2-мерные грани и каковы их площади **г)** количество граней каждой размерности **д)** длины рёбер **е)** радиус вписанного шара **ж)** объём октаплекса.

---

[1] *гранью* выпуклой фигуры называется непустое её пересечение с гиперплоскостью, относительно которой фигура лежит в одном полупространстве; *размерностью* грани называется размерность минимального по включению содержащего эту грань аффинного подпространства

[2] т. е. соединяющих центрально симметричные вершины

[3] т. е. таких прямых, центральная симметрия в ортогональной гиперплоскости к которым переводит куб в себя

[4] угол между вектором v и аффинным подпространством с направляющим векторным подпространством U это минимум из углов vu с $u \in U$

[5] т. е. в выпуклой оболочке концов стандартных базисных векторов пространства $\mathbb{R}^{n+1}$

[6] он подобен выпуклой оболочке центров граней стандартного куба

[7] Многогранник Φ называется *правильным*, если его несобственная группа O_Φ транзитивно действует на множестве его *флагов*: вершина, примыкающее к ней ребро, примыкающая к нему 2-мерная грань, примыкающая к ней 3-мерная грань и т. д.

Персональный табель ________________________________ . (напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 15 (2 апреля 2014)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1а			
б			
2			
3			
4а			
б			
в			
г			
д			
5а			
б			
в			
г			
6			
7а			
б			
в			
г			
д			
е			
ж			
з			
8			
9а			
б			
в			
10а			
б			
в			
г			
д			
е			
ж			