Билинейные формы

A14◇1. Для произвольной билинейной формы β на пространстве V выразите матрицы операторов $V \to V^*$, заданных правилами $v \mapsto \beta(*, v)$ и $v \mapsto \beta(v, *)$, через матрицу Грама формы β.

A14◇2. Покажите, что в пучке билинейных форм $\lambda\beta(u,w) + \mu\beta(w,u)$, ассоциированном с несимметричной формой β, есть ровно одна симметричная и ровно одна кососимметричная форма. Могут ли обе они быть вырождены, если форма β невырождена?

A14◇3. Приведите пример такого пространства V с невырожденной билинейной формой β и подпространства $U \subset V$, что ограничение β на U невырождено и $U^\perp \neq {}^\perp U$.

A14◇4. Приведите пример такого пространства V с вырожденной билинейной формой β и подпространства $U \subset V$, дополнительного к ядру левой корреляции $\beta^* : V \to V^*$, $v \mapsto \beta(v, *)$, что ограничение формы β на U вырождено.

A14◇5. Пусть несимметричная билинейная форма на пространстве V ограничивается в невырожденную форму на конечномерном подпространстве $U \subset V$. Постройте изометрический изоморфизм между ${}^\perp U$ и $U^\perp$.

A14◇6. Покажите, что характеристический многочлен $\chi_\beta(\lambda, r) = \det\left(\lambda B_e^t + \varrho B_e\right)$ несимметричной формы β ненулевой тогда и только тогда, когда левое и правое ядра формы β имеют нулевое пересечение.

A14◇7 (изометрии). Пусть билинейная форма $\beta : V \times V \to \Bbbk$ невырождена. Покажите, что

а) $\mathrm{O}_\beta(V) \overset{\text{def}}{=} \{g : V \to V \mid \forall\, u, w \in V\ \beta(gu, gw) = \beta(u, w)\}$ является подгруппой[1]в $\mathrm{GL}(V)$

б) отличные от ± 1 собственные числа любой изометрии разбиваются на пары взаимно обратных одинаковой кратности

в*) над замкнутым полем каждой жордановой цепочке изометрии с собственным значением $\lambda \neq \pm 1$ отвечает жорданова цепочка той же длины с собственным значением λ^{-1}, такая что ограничение формы на их линейную оболочку U невырождено и U отщепляется из V биортогональным прямым слагаемым

г*) то же верно для жордановой цепочки длины k с собственным значением $(-1)^k$

д) если форма β (косо)симметрична, то изометричность оператора g равносильная тому, что сопряжённый к g оператор равен g^{-1}.

A14◇8. Покажите, что каждое изотропное подпространство симплектического пространства содержится в некотором лагранжевом[2], а каждое лагранжево совпадает со своим ортогоналом.

A14◇9. У всех ли $F \in \mathrm{Sp}_{2n}(\Bbbk)$ характеристический многочлен возвратный[3] и $\det F = 1$?

A14◇10. Задаёт ли правило[4] $F \mapsto \begin{pmatrix} (F^{-1})^t & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}$ инъективный гомоморфизм $\mathrm{GL}_n(\Bbbk) \hookrightarrow \mathrm{Sp}_{2n}(\Bbbk)$?

A14◇11. Покажите, что симплектическая группа транзитивно действует на симплектических и на изотропных подпространствах любой фиксированной размерности.

A14◇12. Напишите явные формулы для пфаффианов 2-го, 4-го и 6-го порядка.

A14◇13*. Фиксируем любое $n \in \mathbb{N}$ и любое чётное $m \leqslant n$. Покажите, что для кососимметричной матрицы A размера $n \times n$ и произвольной матрицы C из m строк и n столбцов имеет место полиномиальное тождество[5] $\mathrm{Pf}(CAC^t) = \sum\limits_{\#I = m} \mathrm{Pf}(A_I) \cdot \det(C_I)$, где суммирование идёт по всем наборам $I = (i_1, i_2, \dots, i_m)$ строго возрастающих индексов, C_I означает минор m-того порядка, стоящий в столбцах с номерами из I, а $A_I = (a_{i_\mu i_\nu})_{i_\mu, i_\nu \in I}$ — квадратная $m \times m$-подматрица, стоящая в пересечениях строк и столбцов с номерами из I.

---

[1] она называется *группой изометрий* формы β

[2] т. е. имеющим половиннуб размерность

[3] т. е. $\chi_F(t) = t^{2n}\chi_F\left(t^{-1}\right)$

[4] на бескоординатном языке оператор $F \in \mathrm{GL}(V)$ действует на $V^* \oplus V$ парой операторов $F : V \to V$ и $\left(F^{-1}\right)^t : V^* \to V^*$

[5] т. е. равенство в кольце многочленов $\mathbb{Z}[a_{ij}, c_{\alpha\beta}]$

Персональный табель ________________________________ .
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 14 (26 марта 2014)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7а			
б			
в			
г			
д			
8			
9			
10			
11			
12			
13			