Действия и гомоморфизмы

A12◇1. Найдите длины орбит всех точек каждого из платоновых тел под действием собственной и несобственной группы тела. Перечислите орбиты, длина которых меньше порядка группы.

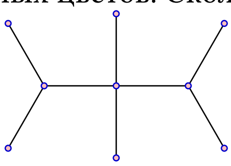
A12◇2. Собственная группа куба действует на множестве вершин V и множестве рёбер E этого куба. Опишите орбиты её диагонального[1] действия на **а)** $V \times V$ **б)** $V \times E$ **в)** $E \times E \times E$.

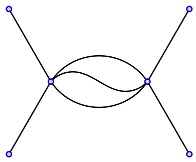
A12◇3. Симметрическая группа S_n стандартно действует на множестве $X = \{1, 2, \dots, n\}$. Опишите орбиты диагонального действия S_n на X^m при $n \geqslant m$ (начните с $m = 2, 3, \dots$).

A12◇4. Конечная группа транзитивно действует на множестве, содержащем более одного элемента. Обязательно ли в группе есть элемент, действующий без неподвижных точек?

A12◇5. Имеется неограниченный запас неразличимых по длине и форме бусин n разных цветов. Сколько различных с виду ожерелий можно изготовить из **а)** 4 **б)** 7 **в)** 8 **г)** 9 бусин?

A12◇6. Имеется неограниченный запас неразличимых по длине и форме кусков верёвок n различных цветов. Сколько можно навязать из них разных с виду фенечек формы

а) 

б) 

A12◇7. Опишите орбиту двойного отношения[2] ϑ четвёрки различных точек на $\mathbb{P}_1$ под действием группы S_4 перестановок этих точек, и найдите все ϑ, орбиты которых короче общей.

A12◇8. Постройте изоморфизмы S_4 с **а)** несобственной группой тетраэдра **б)** собственной группой куба. **в)** Постройте эпиморфизм $S_4 \twoheadrightarrow S_3$.

A12◇9. Найдите порядок группы **а)** $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{F}_q)$ **б)** $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_q)$.

A12◇10. Постройте изоморфизмы A_4 с **а)** собственной группой тетраэдра **б)** $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3)$.

A12◇11. Постройте изоморфизмы A_5 с **а)** собственной группой додекаэдра **б)** $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_4)$ **в)** $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_5)$.

A12◇12. Постройте изоморфизмы **а)** $\mathrm{PSL}_3(\mathbb{F}_2) \xrightarrow{\sim} \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$ **б)** $A_6 \xrightarrow{\sim} \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_9)$.

A12◇13 (системы Штейнера). Набор S из k-элементных подмножеств n-элементного множества X называется *системой Штейнера* $S(t,k,n)$, если каждое t-элементное подмножество X содержится ровно в одном множестве из S. Мы полагаем $\mathrm{Aut}(S) \stackrel{\text{def}}{=} \{g \in S_n \mid \forall Y \in S \;\; g(Y) \in S\}$. **а)** По системе Штейнера $S(t,k,n)$ постройте систему $S(t-1, k-1, n-1)$. **б)** Для всех $q = p^k$, где p — простое, постройте системы $S(2, q, q^2)$ и $S(2, q+1, q^2+q+1)$. **в*)** Покажите, что образы множества $\{0, 1, 4, 9, 3, 5\}$ квадратов поля $\mathbb{F}_{11}$ под действием группы $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{11})$ дробно линейных преобразований проективной прямой $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_{11}) = \{0, 1, \dots, 10, \infty\}$ составляют систему Штейнера $S(5, 6, 12)$ **г*)** Постройте систему Штейнера $S(5, 8, 24)$.

A12◇14*. Найдите порядки *спорадических простых групп Матьё*[3] **а)** $M_{11} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Aut}\big(S(4,5,11)\big)$ **б)** $M_{12} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Aut}\big(S(5,6,12)\big)$ **в)** $M_{22} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Aut}\big(S(3,6,22)\big)$ **г)** $M_{23} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Aut}\big(S(4,7,23)\big)$ **д)** $M_{24} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Aut}\big(S(5,8,24)\big)$ и покажите, что M_{11}, M_{22} и M_{23} суть стабилизаторы точек естественных действий M_{12}, M_{23} и M_{24}.

A12◇15. Постройте изоморфизмы **а)** $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{F}_4) \xrightarrow{\sim} M_{21} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Aut}\big(S(2,5,21)\big)$ **б*)** $A_6 \xrightarrow{\sim} [M_{10}, M_{10}]$, где $M_{10} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Aut}\big(S(3,4,10)\big)$ и $[G,G] \subset G$ — подгруппа, порождённая коммутаторами $ghg^{-1}h^{-1}$, $g, h \in G$.

A12◇16. Опишите группу автоморфизмов группы **а)** $\mathbb{Z}/(n)$ **б)** $\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$ **в)** D_3 **г)** D_4 **д)** Q_8.

A12◇17. У каких групп из предыдущей задачи все автоморфизмы являются внутренними?

A12◇18. Найдите индекс подгруппы внутренних автоморфизмов в группе $\mathrm{Aut}\,(A_5)$.

A12◇19*. Постройте внешний автоморфизм симметрической группы[4] S_6.

---

[1] если G действует на множествах $X_1, X_2, \dots, X_m$, то *диагональное* действие G на $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m$ происходит по правилу $g : (x_1, x_2, \dots, x_m) \mapsto (gx_1, gx_2, \dots, gx_m)$

[2] *двойное отношение* $[a,b,c,d] = \frac{d-b}{d-a} : \frac{c-b}{c-a} \in \Bbbk \smallsetminus \{0,1\}$ равно образу точки d при дробно линейном преобразовании $\mathbb{P}_1(\Bbbk)$, переводящем a, b, c в ∞, 0, 1

[3] ответы: 7920, 95 040, 443 520, 10 200 960, 244 823 040

[4] подсказка: найдите в S_6 два разных класса сопряжённости, состоящие из одинакового числа элементов, и попытайтесь «переставить» их друг с другом подходящим автоморфизмом

Персональный табель ______________________________ .
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 12 (19 февраля 2014)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1			
2а			
б			
в			
3			
4			
5а			
б			
в			
г			
6а			
б			
7			
8а			
б			
в			
9а			
б			
10а			
б			
11а			
б			
в			
12а			
б			
13а			
б			
в			
г			
14а			
б			
в			
г			
д			
15а			
б			
16а			
б			
в			
г			
д			
17			
18			
19			