Пространства с оператором

A10◇1. Всякая ли матрица сопряжена своей транспонированной?

A10◇2. Приведите пример нетождественного оператора без циклического вектора[1].

A10◇3. Перечислите классы подобных матриц в $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{F}_p)$, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ и $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$ для $p = 2, 3, 5$.

A10◇4. Найдите степень минимального многочлена квадратной матрицы ранга 1.

A10◇5. Пусть характеристический многочлен линейного оператора $F : V \to V$ неприводим и имеет степень d. Покажите, что $\dim V = d$ и $\forall\, v \in V \smallsetminus 0$ векторы $v, Fv, \dots, F^{d-1}v$ составляют базис в V.

A10◇6. Покажите, что каждый линейный оператор $G : \Bbbk[t]/(f) \to \Bbbk[t]/(f)$, перестановочный с умножением на t, является оператором умножения на многочлен $g(t) = G([1])$.

A10◇7. Пусть степень минимального многочлена линейного оператора $F : V \to V$ равна $\dim V$. Всякий ли оператор, перестановочный с F, является многочленом от F?

A10◇8. Каждый ли оператор G, перестановочный со всеми операторами, перестановочными с оператором F над алгебраически замкнутым полем, является многочленом от F?

A10◇9. Найдите $\dim \mathrm{Hom}_{\Bbbk[x]}\big(\Bbbk[x]/(f), \Bbbk[x]/(g)\big)$, когда $f = p^n$, $g = p^m$, где $p \in \Bbbk[x]$ неприводим, и когда нод$(f, g) = 1$.

A10◇10. Бывают ли $(n+1)$-мерные пространства коммутирующих полупростых операторов на $\mathbb{C}^n$?

A10◇11. Покажите, что[2] $(F + G)_s = F_s + G_s$ и $(F + G)_n = F_n + G_n$, если $FG = GF$.

A10◇12. Линейный оператор $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ имеет матрицу с числами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ на побочной диагонали и нулями в остальных местах. Когда он диагонализуем над $\mathbb{R}$?

A10◇13. Диагонализуем ли над $\mathbb{Q}$ оператор F, удовлетворяющий уравнению $F^3 = 6F^2 - 11F + 6E$?

A10◇14. Минимальный многочлен оператора $F : V \to V$ равен $g_1 g_2$ и нод$(g_1, g_2) = 1$. Покажите, что $V = U_1 \oplus U_2$ с $F(U_i) \subset U_i$ и минимальными многочленами $F|_{U_i}$ равными g_i.

A10◇15. Равносильна ли нильпотентность $F : \Bbbk^n \to \Bbbk^n$ тому, что $\operatorname{tr} F^k = 0$ при $1 \leqslant k \leqslant n$?

A10◇16. Установите биекцию между разложениями $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_s$ и такими разложениями $1 = \pi_1 + \pi_2 + \cdots \pi_s$ в $\mathrm{End}\, V$, что $\pi_i^2 = \pi_i$ и $\pi_i \pi_j = \pi_j \pi_i = 0$ при $i \neq j$.

A10◇17. Пусть операторы A и B таковы, что $AB - BA = B$. Покажите, что B нильпотентен.

A10◇18* (лемма Барта). Над алгебраически замкнутым полем докажите, что любые два оператора A и B с $\mathrm{rk}(AB - BA) = 1$ имеют общий собственный вектор.

A10◇19. Найдите ЖНФ квадрата $J_m^2(\lambda)$ жордановой $m \times m$-клетки $J_m(\lambda)$ **а)** с $\lambda \neq 0$ **б)** с $\lambda = 0$.

A10◇20. Найдите $f\big(J_m(\lambda)\big)$ для аналитической в окрестности $\lambda \in \mathbb{C}$ функции $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

A10◇21. Дана матрица $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}$. Операторы $L_A, R_A, \mathrm{Ad}_A : \mathrm{Mat}_{n\times n} \to \mathrm{Mat}_{n\times n}$ переводят $X \in \mathrm{Mat}_{n\times n}$ в $L_A(X) = A \cdot X$, $R_A(X) = X \cdot A$, $\mathrm{Ad}_A(X) = A \cdot X \cdot A^{-1}$. Вычислите их следы и определители.

A10◇22. Матрица $A \in \mathrm{Mat}_2(\Bbbk)$ действует на пространстве однородных многочленов степени 2 от двух переменных $x = (x_1, x_2)$ оператором $f(x) \mapsto f(x \cdot A)$. Найдите его след и определитель.

A10◇23. Найдите собственные числа, собственные и корневые подпространства и минимальный многочлен оператора **а)** $f(x) \mapsto f(x-1, y+1)$ в линейной оболочке мономов $x^n y^m$ с $0 \leqslant m, n \leqslant 2$ **б)** $f(x) \mapsto \int_0^1 (x^2 y + x y^2) f(y)\, dy$ на пространстве $\{f \in \mathbb{R}[x] \mid \deg f \leqslant 3\}$ **в)** $f(x) \mapsto f(ax + b)$ на пространстве $\{f \in \mathbb{R}[x] \mid \deg f \leqslant n\}$.

A10◇24. Решите в $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ уравнения **а)** $X^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ **б)** $X^2 = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.

A10◇25. Найдите **а)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{50}$ **б)** $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}^{50}$.

A10◇26. Вычислите $\sin A$ и e^A для матриц **а)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ **б)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

---

[1] вектор $v \in V$ называется *циклическим* для оператора $F : V \to V$, если векторы $F^m v$, $m \geqslant 0$, линейно порождают V

[2] F_s и F_n означают полупростое и нильпотентное слагаемые разложения Жордана оператора F

(напишите свои имя, отчество и фамилию)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			
18			
19а			
б			
20			
21			
22			
23а			
б			
в			
24а			
б			
25а			
б			
26а			
б			