$\mathbb{Z}$-модули

А9◇1. Покажите, что если фактор модуль $L = M/N$ свободен, то $M \simeq N \oplus L$ (над любым кольцом).

А9◇2. Покажите, что если порядки[1] конечных подгрупп $A_1, A_2, \dots, A_n$ абелевой группы A взаимно просты, то их сумма в A является прямой.

А9◇3. Сколько различных разложений в прямую сумму двух циклических подгрупп у аддитивной абелевой группы $\mathbb{Z}/(5) \oplus \mathbb{Z}/(5)$?

А9◇4. Верно ли, что подмодуль $N = \mathbb{Z} \cdot w \subset \mathbb{Z}^m$, порождённый одним вектором $w = (n_1, n_2, \dots, n_m)$, отщепляется прямым слагаемым[2] тогда и только тогда, когда нод$(n_1, n_2, \dots, n_m) = 1$?

А9◇5. Является ли $\mathbb{Z}$-модуль многочленов с чётным свободным членом в $\mathbb{Z}[x]$ **а)** конечно порождённым? **б)** свободным? **в)** Отщепляется ли он прямым слагаемым?

А9◇6. Модуль называется *полупростым*, если любой его собственный подмодуль отщепляется прямым слагаемым. Какие из следующих $\mathbb{Z}$-модулей полупросты: **а)** $\mathbb{Z}$ **б)** $\mathbb{Z}^n$ **в)** $\mathbb{Z}/(p)$ **г)** $\big(\mathbb{Z}/(p)\big)^n$ **д)** $\mathbb{Z}/(p^m)$ **е)** $\big(\mathbb{Z}/(p^m)\big)^n$

А9◇7. Докажите, что $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M_1 \oplus M_2, N_1 \oplus N_2) = \bigoplus \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M_\mu, N_\nu)$.

А9◇8. Опишите модуль всех $\mathbb{Z}$-линейных гомоморфизмов $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(\mathbb{Z}/(m), \mathbb{Z}/(n)\big)$ в случае, когда **а)** $m = p^\mu$, $n = p^\nu$ (p простое, $\mu, \nu \in \mathbb{N}$ любые) **б)** нод$(m, n) = 1$ **в)** m, n любые

А9◇9. Пусть конечно порождённые свободные $\mathbb{Z}$-модули $N \subset L$ таковы, что фактор L/N конечен. Свободны ли модули $L' = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(L, \mathbb{Z})$ и $N' = \{\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(L, \mathbb{Q}) \mid \varphi(N) \subset \mathbb{Z}\}$? Как связаны между собой L/N и N'/L'? Одинаково ли у них число элементов?

А9◇10. $\mathbb{Z}$-модули с одной образующей называются *циклическими*. Покажите что **а)** любой циклический $\mathbb{Z}$-модуль изоморфен $\mathbb{Z}$ или $\mathbb{Z}/(n)$ **б)** $\mathbb{Z}/(n) \oplus \mathbb{Z}/(m)$ циклический $\iff$ нод$(m, n) = 1$.

А9◇11. Изоморфны ли абелевы группы $\mathbb{Z}/(6) \oplus \mathbb{Z}/(36)$ и $\mathbb{Z}/(12) \oplus \mathbb{Z}/(18)$?

А9◇12. Напишите каноническое разложение[3] для аддитивных абелевых групп **а)** $\mathbb{Z}/(6)$, $\mathbb{Z}/(12)$, $\mathbb{Z}/(24)$ и $\mathbb{Z}/(60)$ **б)** всех абелевых групп порядка 4, 6, 8, 12, 16, 24, 36, 48 **в)** $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(\mathbb{Z}/(6), \mathbb{Z}/(12)\big)$ **г)** $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(\mathbb{Z}/(12), \mathbb{Z}/(6)\big)$ **д)** $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(\mathbb{Z}/(12), \mathbb{Z}/(18)\big)$ **е)** $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(\mathbb{Z}/(4), \mathbb{Z}/(8)\big)$ **ж)** $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(\mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(2), \mathbb{Z}/(8)\big)$

А9◇13. Есть ли в абелевой группе $\mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(16)$ подгруппа, изоморфная **а)** $\mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(8)$ **б)** $\mathbb{Z}/(4) \oplus \mathbb{Z}/(4)$ **в)** $\mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(2)$

А9◇14. Сколько подгрупп порядков 2 и 6 в нециклической абелевой группе порядка 12?

А9◇15. Напишите каноническое разложение для фактора решётки $\mathbb{Z}^3$ по подрешётке, порождённой векторами: **а)** $(7, 2, 3), (21, 8, 9), (5, -4, 3)$ **б)** $(4, 5, 3), (5, 6, 5), (8, 7, 9)$ **в)** $(2, -4, 6), (6, -6, 10), (2, 5, 8), (6, 0, 5)$ **г)** $(-81, -6, -33), (60, 6, 24), (-3, 6, -3), (18, 6, 6)$ **д)** $(-62, -8, -26), (40, 10, 16), (22, -8, 10), (20, 2, 8)$

А9◇16. Найдите в абелевой группе, порождённой элементами a_1, a_2, a_3 порядок элемента **а)** $a_1 + 2a_3$, если $a_1 + a_2 + 4a_3 = 2a_1 - a_2 + 2a_3 = 0$ **б)** $32a_1 + 31a_3$, если $2a_1 + a_2 - 50a_3 = 4a_1 + 5a_2 + 60a_3 = 0$

А9◇17. Пусть $a = [1]_9 \in \mathbb{Z}/(9)$, и $b = [1]_{27} \in \mathbb{Z}/(27)$. Напишите каноническое разложение для фактор группы $\mathbb{Z}/(9) \oplus \mathbb{Z}/(27)$ по подгруппе, порождённой элементом $3a + 9b$.

А9◇18. Пусть порядок конечно порождённой абелевой группы A делится на m. Покажите, что в A есть подгруппа порядка m.

А9◇19. Пусть для любого $m \in \mathbb{N}$ число элементов порядка m в двух конечных абелевых группах A и B одинаково. Верно ли, что $A \simeq B$?

А9◇20. Пусть для конечно порождённых модулей A, B, C над кольцом главных идеалов имеет место изоморфизм $A \oplus C \simeq B \oplus C$. Покажите, что $A \simeq B$.

А9◇21. Докажите, что при $n \geqslant 3$ мультипликативная группа обратимых вычетов в $\mathbb{Z}/\big(2^n\big)$ изоморфна прямой сумме мультипликативной группы $\{\pm 1\}$ и аддитивной группы $\mathbb{Z}/\big(2^{n-2}\big)$.

---

[1] напомним, что *порядком* конечной группы называется количество элементов в ней

[2] т. е. $\exists$ подмодуль $L \subset \mathbb{Z}^n$, такой что $\mathbb{Z}^m = N \oplus L$

[3] т. е. в прямую сумму $\mathbb{Z}^r \oplus \bigoplus_{p,\mu} \mathbb{Z}/\big(p^\mu\big)$

Персональный табель ______________________________________. Листок №9 (27 ноября 2013)

(напишите свои имя, отчество и фамилию)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1			
2			
3			
4			
5а			
б			
в			
6а			
б			
в			
г			
д			
е			
7			
8а			
б			
в			
9			
10			
11			
12а			
б			
в			
г			
д			
е			
ж			
13			
14			
15а			
б			
в			
г			
д			
16а			
б			
17			
18			
19			
20			
21			