

### Обращение Мёбиуса

**A3<sup>2/3</sup>◊1 (функция Мёбиуса).** Функция Мёбиуса  $\mu(n)$  сопоставляет числу  $n \in \mathbb{N}$  нуль, если  $n$  делится на квадрат простого числа, и  $(-1)^s$ , где  $s$  — число всех натуральных простых делителей  $n$ , если  $n$  не делится на квадраты простых чисел; кроме того,  $\mu(1) = 1$ . Покажите, что

а)  $\mu(n)$  является мультипликативным характером числа  $n$     б)  $\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 1 \\ 0 & \text{при } n > 1 \end{cases}$

**A3<sup>2/3</sup>◊2 (обращение Мёбиуса).** Пусть для функции  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  при каждом  $n \in \mathbb{N}$  известно значение суммы  $\sigma(n) = \sum_{d|n} g(d)$ . Покажите, что  $g(n) = \sum_{d|n} \sigma(d) \cdot \mu(n/d)$ .

**A3<sup>2/3</sup>◊3.** Для произвольного  $m \in \mathbb{N}$  вычислите  $\sum_{d|m} \varphi(d)$ , где  $\varphi$  — функция Эйлера.

**A3<sup>2/3</sup>◊4 (круговые многочлены).** Приведённый многочлен  $\Phi_n \in \mathbb{C}[x]$ , корни которого суть комплексные первообразные корни степени  $n$  из 1 и только они, называется  $n$ -тым *круговым* *многочленом*. Найдите  $\deg \Phi_n$  и покажите, что    а)  $x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$     б)  $\Phi_n(x) = \prod_{d|n} (x^{n/d} - 1)^{\mu(d)}$

в)  $\Phi_{2n}(x) = \Phi_n(-x)$  при нечётном  $n$     г)  $\Phi_{pn}(x) = \Phi_n(x^p) / \Phi_n(x)$  при простом  $p \nmid n, p > 2$

д) для всех простых  $p$   $\Phi_p(x) = x^{p-1} + \dots + x + 1$  и  $\Phi_{p^k}(x) = \Phi_p(x^{p^{k-1}})$

е) при простых  $p_i \neq p_j$   $\Phi_{p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n}}(x) = \Phi_{p_1 p_2 \dots p_n}(x^{p_1^{k_1-1} \dots p_n^{k_n-1}})$     ж)  $\Phi_n \in \mathbb{Z}[x]$  неприводим в  $\mathbb{Q}[x]$ .

**A3<sup>2/3</sup>◊5.** Обозначим через  $i_m$  число неприводимых приведённых многочленов степени  $m$  в  $\mathbb{F}_p[x]$ .

Докажите в  $\mathbb{Q}[[t]]$  равенство  $(1 - pt)^{-1} = \prod_{m \in \mathbb{N}} (1 - t^m)^{-i_m}$ .

**A3<sup>2/3</sup>◊6.** Используя подходящую модификацию обращения Мёбиуса, докажите, что число неприводимых многочленов степени  $n$  в  $\mathbb{F}_p[x]$  равно  $\frac{1}{n} \sum_{d|n} p^d \mu(n/d)$ .

**A3<sup>2/3</sup>◊7 (локально конечные чумы).** Множество называется *частично упорядоченным* (или *чумом*) если на нём задано рефлексивное транзитивное *кососимметричное*<sup>1</sup> отношение  $x \leq y$ . чум называется *локально конечным*, если  $\forall x, y$  отрезок  $[x, y] \stackrel{\text{def}}{=} \{z \mid x \leq z \leq y\}$  конечен. Являются ли локально конечными чумами: а)  $\mathbb{N}$  с отношением  $n|m$     б) совокупность конечных подмножеств произвольного множества с отношением  $X \subseteq Y$

**A3<sup>2/3</sup>◊8 (алгебра инцидентности чума).** Для локально конечного чума  $\mathfrak{F}$  обозначим через  $\mathcal{A}(\mathfrak{F})$  множество всех функций  $\varrho : \mathfrak{F} \times \mathfrak{F} \rightarrow \mathbb{C}$ , обращающихся в нуль на всех парах  $(x, y)$ , не находящихся в отношении  $x \leq y$ . Зададим в  $\mathcal{A}(\mathfrak{F})$  сложение  $\varrho_1 + \varrho_2 : (x, y) \mapsto \varrho_1(x, y) + \varrho_2(x, y)$  и умножение  $\varrho_1 \star \varrho_2 : (x, y) \mapsto \sum_{x \leq z \leq y} \varrho_1(x, z) \varrho_2(z, y)$ . Покажите, что получилось (некоммутативное) кольцо с единицей, обратимые элементы которого суть такие функции  $\varrho$ , что  $\forall x \in \mathfrak{F} \varrho(x, x) \neq 0$ .

**A3<sup>2/3</sup>◊9 (функция Мёбиуса чума).** Убедитесь, что функция  $\zeta(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{при } x \leq y \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$  обратима в  $\mathcal{A}(\mathfrak{F})$  и функция  $\mu \stackrel{\text{def}}{=} \zeta^{-1}$  удовлетворяет равенствам<sup>2</sup>  $\mu(x, y) = - \sum_{x \leq z < y} \mu(x, z) = - \sum_{x < z \leq y} \mu(z, y)$ .

**A3<sup>2/3</sup>◊10 (обращение Мёбиуса в чуме).** Пусть в чуме  $\mathfrak{F}$  имеется наименьший элемент<sup>3</sup>. Покажите, что любая функция  $g : \mathfrak{F} \rightarrow \mathbb{C}$  восстанавливается по значениям своих сумм  $\sigma(x) = \sum_{y \leq x} g(y)$  по формуле  $g(x) = \sum_{y \leq x} \sigma(y) \mu(y, x)$ .

**A3<sup>2/3</sup>◊11.** Найдите функции Мёбиуса для чумов из зад. A3<sup>2/3</sup>◊7. Во что превращается в этих случаях предыдущая формула обращения?

<sup>1</sup>т. е. из  $x \leq y$  и  $y \leq x$  следует, что  $x = y$

<sup>2</sup>запись  $x < y$  означает, что  $x \leq y$  и  $x \neq y$

<sup>3</sup>т. е. такой элемент  $m$ , что  $\forall x \in \mathfrak{F} m \leq x$

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1а			
б			
2			
3			
4а			
б			
в			
г			
д			
е			
ж			
5			
6			
7а			
б			
8			
9			
10			
11			